

APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE NÚMERO ENTERO Y
DE SUS OPERACIONES DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN, MEDIADOS POR
EL MODELO DIDÁCTICO DE DESPLAZAMIENTO Y EL SOFTWARE DE
GEOMETRÍA DINÁMICA CABRI II PLUS

Ricardo Alexander Muñoz Pabón
Diego Albeiro Puerres Ortiz

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Licenciatura en Matemáticas
San Juan de Pasto
2014

APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE NÚMERO ENTERO Y
DE SUS OPERACIONES DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN, MEDIADOS POR
EL MODELO DIDÁCTICO DE DESPLAZAMIENTO Y EL SOFTWARE DE
GEOMETRÍA DINÁMICA CABRI II PLUS

Ricardo Alexander Muñoz Pabón
Diego Albeiro Puerres Ortiz

*Proyecto de grado presentado como requisito parcial para optar el título de
licenciados en Matemáticas*

Asesor:
Oscar Alberto Narváez Guerrero
Especialista en Nuevas Tecnologías

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Licenciatura en Matemáticas
San Juan de Pasto
2014

“las ideas y conclusiones aportadas en la Tesis de Grado, son
responsabilidad exclusiva de sus autores”

Artículo 1º del Acuerdo 324 de Octubre 11 de 1966 emanado por el
Honorable Concejo Directivo de la Universidad de Nariño

Nota de Aceptación

Oscar Alberto Narváez G.
(Director)

Libardo Jácome
(Jurado)

Vicente Erdulfo Ortega P.
(Jurado)

San Juan de Pasto, Febrero de 2014

AGRADECIMIENTOS

A Dios por guiarnos en el camino hacia la consecución de este sueño hecho realidad.

A la Universidad de Nariño por abrir sus puertas y brindarnos la oportunidad de tener acceso al conocimiento y poder lograr un mejor futuro.

Un agradecimiento especial para el profesor Oscar Alberto Narváez Guerrero, quien con su amistad, experiencia y capacidad intelectual apoyo la realización de esta investigación.

A todos los que hicieron parte del cumplimiento de este reto, mil gracias

Después de un arduo trabajo y sacrificio, queremos dedicar, con profundo cariño, este gran esfuerzo a todas aquellas personas que nos brindaron su apoyo para culminar esta etapa.

A Dios porque con su infinito amor supo guiar nuestro camino hacia el éxito.

A nuestras madres Magola del Socorro Pabón Buchely y Esther Amelia Ortiz Guacas, por ser la luz en nuestro camino, por brindarnos siempre su gran amor y apoyo incondicional, por creer en nuestras capacidades y sobre todo por ser ejemplo a seguir.

A nuestras familias por brindarnos su apoyo desinteresado, ya que de una u otra forma colaboraron para que nuestros sueños se hicieran realidad

*Ricardo Alexander Muñoz Pabón
Diego Albeiro Puerres Ortiz*

RESUMEN

En el estudio de los números enteros se encuentran involucradas diferentes problemáticas a las cuales deben enfrentarse tanto estudiantes, como profesores de toda institución educativa; entre ellas podemos citar: el concepto de número entero, la adición (sustracción) de números enteros, la multiplicación (división) de los mismos, el orden de ellos, la aplicación de los números enteros en el medio social, la interpretación que los estudiantes dan a los signos más y menos, la apropiación de los conceptos, etc. Entonces, es aquí en donde surge la utilización de modelos concretos – por así decirlo – para la explicación de estos números, ya sea por parte de los profesores, por parte de textos escolares, etc.

En esta investigación se pretende utilizar las nuevas tecnologías y un software de geometría dinámica como lo es *CABRI II PLUS*, para el desarrollo de la enseñanza y el aprendizaje de las operaciones básicas de los números enteros, apoyándose en uno de los tantos modelos existentes para el manejo de ellos: el modelo de desplazamiento, más explícitamente, el modelo de la recta numérica, con el fin de constatar si el uso de estas nuevas tecnologías ayudan o no al mejoramiento de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de los números enteros.

Palabras claves: Números Enteros, Concepto de Número Entero, Adición y Sustracción de Números Enteros, Modelos Concretos, Nuevas Tecnologías, CABRI II PLUS

ABSTRACT

In the study of the integers involved different issues which must be addressed to both students and teachers of any educational institution is located, among them we can mention: the concept of integer addition (subtraction) of whole numbers, multiplication (division) of them, order them, the application of the integers in the social environment, the interpretation that give students the most and least signs the appropriation of concepts, etc. So it is here that the use of concrete models arises - as it were - for explanation of the numbers, either by teachers, by school texts, etc.

This research aims to use new technology and dynamic geometry software as CABRI II PLUS is for the development of teaching and learning the basic operations of whole numbers, based on one of many existing models for handling them: the displacement model, more explicitly, the model of the number line, in order to determine whether the use of these new technologies help or not to improve the teaching and learning of integers.

Keywords: Integers, Concept of Integer, Addition and Subtraction of Integers, Concrete Models, New Technologies, CABRI II PLUS

CONTENIDO

PÁG.

INTRODUCCIÓN.....	17
1. MARCO CIENTÍFICO.....	18
1.1 PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA.....	18
1.2 OBJETIVOS.....	20
1.2.1 Objetivo General.....	20
1.2.2 Objetivos Específicos.....	20
2. MARCO EMPÍRICO REFERENCIAL.....	22
2.1 ANTECEDENTES.....	22
2.1.1 Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos (Cid, 2001):.....	22
2.1.2 La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión (Cid, 2003):.....	22
2.1.3 Números Enteros (Vargas, 1990):.....	23
2.2 MARCO CONTEXTUAL.....	23
2.2.1 Entorno general.....	23
2.2.1.1 Identificación y ubicación.....	23
2.2.1.2 Aspectos Socioculturales.....	24
2.2.1.3 La Educación en San Juan de Pasto.....	24
2.2.2 Entorno Específico.....	25
2.2.2.1 Corregimiento de Cabrera.....	25
2.2.3 Institución Educativa Municipal Cabrera.....	25
2.3 MARCO LEGAL.....	26
2.3.1 Constitución Política de Colombia.....	26
2.3.2 Ley general de educación.....	27
2.3.3 Decreto 1860 de 1994.....	27
2.4 MARCO TEÓRICO.....	28
2.4.1 Génesis del número negativo.....	28
2.4.1.1 Civilizaciones Griega, Hindú, Árabe y Época Medieval.....	28
2.4.1.2 Siglos XV a XVII.....	30
2.4.1.3 Siglo XVIII.....	32
2.4.1.4 Siglo XIX.....	35
2.4.2 Modelos.....	37

2.4.2.1 Modelos concretos en la enseñanza de los números enteros ...	38
2.4.2.1.1 Modelo de Neutralización	39
2.4.2.1.2 Modelo de Desplazamiento	39
2.4.3 Fundamentos teóricos de las tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas	39
2.4.3.1 La Mediación	40
2.4.3.1.1 Mediación Pedagógica:	40
2.4.3.1.2 Mediación Tecnológica:	40
2.4.3.2 Representaciones semióticas ejecutables	41
2.4.3.3 La cognición situada	44
2.4.3.4 Solución de problemas	45
2.4.3.5 Fluidez Algorítmica	46
2.4.3.6 Fluidez Conceptual	47
2.4.4 Currículo	47
2.4.4.1 Concepciones	47
2.4.4.2 Concepto de currículo	47
2.4.4.3 Características del currículo	48
2.4.4.4 Elementos del currículo	49
2.4.4.4.1 Propósitos	49
2.4.4.4.2 Contenidos curriculares	50
2.4.4.4.3 Secuenciación	50
2.4.4.4.4 La metodología	51
2.4.4.4.5 Recursos didácticos	51
2.4.4.4.6 Evaluación	51
2.4.5 Lineamientos curriculares para el área de matemáticas	53
2.4.5.1 Pensamiento Numérico:	53
2.4.5.2 Pensamiento Espacial:	54
2.4.5.3 Pensamiento Métrico:	54
2.4.6 Estándares curriculares	55
2.4.6.1 Definición	55
2.4.6.2 Estándares curriculares de competencias en Matemáticas	55
2.4.6.3 Coherencia vertical y horizontal	55
2.4.6.4 Estándares curriculares de grado séptimo (pensamiento numérico y sistemas numéricos) (MEN, 2006)	56
2.4.7 Competencias básicas en matemáticas	56
2.4.7.1 Concepto	56
2.4.7.2 Utilidad del concepto de competencia matemática	57
2.4.7.3 Competencias matemáticas	57
2.4.7.3.1 Tipos de competencias matemáticas	58
2.4.7.4 Competencias matemáticas en PISA 2003	58
3. METODOLOGÍA	59
3.1 ENFOQUE	59
3.2 POBLACIÓN	59
3.3 CATEGORÍAS	60
3.4 INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS	60

3.5 ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN	60
3.5.1 Relato/ Anécdota	60
3.5.2 Estadística Descriptiva	61
4. ANÁLISIS DE RESULTADOS	62
4.1 ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES	62
4.2 ACTIVIDADES DE CONCEPTUALIZACIÓN DE NÚMERO ENTERO	64
4.3 ACTIVIDADES DE ORDEN EN LOS NÚMEROS ENTEROS.....	83
4.4 ACTIVIDADES DE VALOR ABSOLUTO EN LOS NÚMEROS ENTEROS.....	97
4.5 ACTIVIDADES DE ADICIÓN EN LOS NÚMEROS ENTEROS.....	108
4.6 ACTIVIDADES DE SUSTRACCIÓN EN LOS NÚMEROS ENTEROS.....	137
5. CONCLUSIONES.....	153
BIBLIOGRAFÍA.....	157
ANEXOS.....	159

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Actividades de aprendizaje 2013.	63
Tabla 2. Concepto, actividad 1.....	67
Tabla 3. Concepto, actividad 2.....	72
Tabla 4. Concepto, actividad 3.....	76
Tabla 5. Concepto, actividad 4.....	80
Tabla 6. Orden, actividad 1	86
Tabla 7. Orden, actividad 2.....	90
Tabla 8. Orden, actividad 3.....	95
Tabla 9. Valor absoluto, actividad 1	100
Tabla 10. Valor absoluto, actividad 2	103
Tabla 11. Valor absoluto, actividad 3.....	107
Tabla 12. Adición, sub-actividad 1	117
Tabla 13. Adición, sub-actividad 2	119
Tabla 14. Adición, sub-actividad 1	130
Tabla 15. Adición, sub-actividad 2	132
Tabla 16. Sustracción, sub-actividad 1	145
Tabla 17. Sustracción, sub-actividad 2	148
Tabla 18. Sustracción, sub-actividad 3	150

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representación semiótica.....	42
Figura 2: Ejecutabilidad de las representaciones semióticas.....	43
Figura 3. Concepto, actividad 1.....	65
Figura 4. Concepto, construcción grupo 2	67
Figura 5. Concepto, construcción grupo 4	68
Figura 6. Concepto, construcción grupo 1	68
Figura 7. Concepto, construcción grupo 11	69
Figura 8. Concepto, actividad 2	70
Figura 9. Concepto, construcción grupo 7	72
Figura 10. Concepto, construcción grupo 14	73
Figura 11. Concepto, actividad 3	74
Figura 12. Concepto, construcción grupo 4	75
Figura 13. Concepto, construcción grupo 4	77
Figura 14. Concepto, construcción grupo 9	77
Figura 15. Concepto, construcción grupo 12	78
Figura 16. Concepto, actividad 4	79
Figura 17. Concepto, respuesta grupo 10.....	81
Figura 18. Concepto, respuesta grupo 13.....	81
Figura 19. Orden, actividad 1	84
Figura 20. Orden, respuesta grupo 10.....	87
Figura 21. Orden, respuesta grupo 8.....	87
Figura 22. Orden, actividad 2.....	88
Figura 23. Orden, respuesta grupo 9.....	91
Figura 24. Orden, respuesta grupo 4.....	92
Figura 25. Orden, actividad 3.....	93
Figura 26. Orden, respuesta grupo 4.....	96
Figura 27. Orden, respuesta grupo 5.....	96
Figura 28. Valor absoluto, actividad 1.....	98
Figura 29. Valor absoluto, respuesta grupo 12	101
Figura 30. Valor absoluto, respuesta grupo 13	101
Figura 31. Valor absoluto, actividad 2.....	102
Figura 32. Valor absoluto, respuesta grupo 10	104
Figura 33. Valor absoluto, respuesta grupo 7	104
Figura 34. Valor absoluto, actividad 3.....	105
Figura 35. Valor absoluto, respuesta grupo 10	108
Figura 36. Adición, sub-actividad 1	109
Figura 37. Adición, sub-actividad 2	114

Figura 38. Adición, respuesta grupo 9	118
Figura 39. Adición, respuesta grupo 8	118
Figura 40. Adición, respuesta grupo 8	120
Figura 41. Adición, respuesta grupo 4	121
Figura 42. Adición, sub-actividad 1	122
Figura 43. Adición, sub-actividad 2	125
Figura 44. Adición, respuesta grupo 10	131
Figura 45. Adición, respuesta grupo 3	132
Figura 46. Adición, respuesta grupo 4	134
Figura 47. Adición, respuesta grupo 5	135
Figura 48. Adición, actividad de refuerzo	135
Figura 49. Adición, respuesta grupo 4	136
Figura 50. Adición, respuesta grupo 5	136
Figura 51. Sustracción, sub-actividad 1	137
Figura 52. Sustracción, sub-actividad 2	141
Figura 53. Sustracción, sub-actividad 3	143
Figura 54. Sustracción, respuesta grupo 6	146
Figura 55. Sustracción, respuesta grupo 8	147
Figura 56. Sustracción, respuesta grupo 4	149
Figura 57. Sustracción, respuesta grupo 7	150
Figura 58. Sustracción, respuesta grupo 5	151
Figura 59. Sustracción, respuesta grupo 7	152

LISTA DE GRÁFICAS

Gráfica 1. Concepto, actividad 1	67
Gráfica 2. Concepto, actividad 2	72
Gráfica 3. Concepto, actividad 3	76
Gráfica 4. Concepto, actividad 4	80
Gráfica 5. Orden, actividad 1	86
Gráfica 6. Orden, actividad 2	90
Gráfica 7. Orden, actividad 3	95
Gráfica 8. Valor absoluto, actividad 1	100
Gráfica 9. Valor absoluto, actividad 2	103
Gráfica 10. Valor absoluto, actividad 3	107
Gráfica 11. Adición, sub-actividad 1	117
Gráfica 12. Adición, sub-actividad 2	119
Gráfica 13. Adición, sub-actividad 1	130
Gráfica 14. Adición, sub-actividad 2	132
Gráfica 15. Sustracción, sub-actividad 1	145
Gráfica 16. Sustracción, sub-actividad 2	148
Gráfica 17. Sustracción, sub-actividad 3	150

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A: *ACTIVIDAD N° 1, INTRODUCCIÓN: Algunas nociones sobre el manejo de Cabri Geometre II Plus*

ANEXO B: *ACTIVIDAD N° 1, CONCEPTUALIZACIÓN DE NÚMERO ENTERO*

ANEXO C: *ACTIVIDAD N° 1, ORDEN EN LOS NÚMEROS ENTEROS*

ANEXO D: *ACTIVIDAD N° 1, VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO*

ANEXO E: *ACTIVIDAD N° 1, ADICIÓN DE NÚMEROS ENTEROS: Ricardo y Diego*

ANEXO F: *ACTIVIDAD N° 2, EL ASCENSOR*

ANEXO G: *ACTIVIDAD N° 1, EL MAGO*

INTRODUCCIÓN

La presente investigación utiliza uno de los tantos modelos concretos existentes para la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros, tanto en su conceptualización como en las circunstancias que involucran la adición y sustracción de los mismos; además, recurre a la ayuda de las nuevas tecnologías, para brindar una mayor claridad y mejor ambiente a los estudiantes de grado séptimo.

En primera instancia, presentamos la descripción del problema a tratar, un resumen de las principales investigaciones realizadas con respecto a dicho tema y la manera como fue abordado. Posteriormente, mostramos un análisis detallado de los principales resultados que se obtuvieron durante el desarrollo de dicha investigación. En ella, los investigadores damos a conocer las actitudes que tomaron los estudiantes, sus principales conclusiones; asimismo, se presentan algunas construcciones realizadas por ellos, señalando sus principales aciertos, como también sus dificultades.

Para finalizar, presentamos las conclusiones que se obtuvieron de la experiencia con dichos estudiantes, como también los anexos, los cuales, muestran las guías que fueron desarrolladas por ellos durante toda la investigación

1. MARCO CIENTÍFICO

1.1 PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

“Si los números negativos y las operaciones con ellos han de lograr el concreto status familiar que tienen los positivos, los alumnos necesitan mucha más experiencia en la exploración y manipulación de las situaciones familiares en las que esos números se encuentran”. Bell, 1986

Los números naturales¹ son utilizados por los niños desde los primeros años de edad, ya sea para contar elementos o para ordenarlos. Además, los utilizan para realizar operaciones tales como: la adición, la cual es entendida por los niños como agregar o aumentar un(os) objeto(s) a otro(s); la sustracción, entendida como quitar o eliminar cierto número de elementos de una colección, cumpliéndose la condición de que el minuendo debe ser mayor que el sustraendo, en el conjunto de los números naturales. El conteo y la ordenación permiten generar una relación biunívoca entre objetos de naturaleza cualquiera y los números naturales. Además, para cualquier número natural, es posible encontrar un conjunto concreto que lo represente, así por ejemplo, el cardinal del conjunto {a, b, c} es representado por el número 3 o el conjunto {gato, perro, caballo} también es representado por el mismo número. De acuerdo con esto, los niños, en su temprana edad, realizan la construcción de conocimientos mediante modelos concretos de relaciones biunívocas – Número \leftrightarrow objeto – en actividades escolares o extraescolares.

Aparentemente, hasta sexto grado, es posible que los estudiantes puedan realizar biyecciones entre los números naturales y modelos concretos, pero en séptimo grado, el maestro se enfrenta a la dificultad de la enseñanza de “LOS NÚMEROS NEGATIVOS” o enteros negativos, en tanto que, no es fácil estudiar a estos números con ayuda de la modelación física. Por ejemplo, si se le pide a un estudiante que intente relacionar los números negativos con la realidad, probablemente responderá que no es posible, esto debido a que, por más que se busque en la realidad perceptual, no es tan inmediato

¹“El número Natural n es la propiedad común que tienen todos los conjuntos coordinables con el conjunto {1, 2, 3..., n}.” (Londoño y Bedoya, 1984, p.11)

encontrar un objeto o un fenómeno físico que se lo pueda relacionar con un número negativo, rompiéndose así la correspondencia Número \leftrightarrow Objeto, la cual se ha venido trabajando ya por más de seis años.

Debido a esto, el maestro recurre, en muchas ocasiones, a modelos concretos para la explicación de los enteros; en particular, para la adición y la sustracción. Este problema es planteado por Eva Cid (2001), como uno de los problemas más recurrentes en la enseñanza y en el aprendizaje de los enteros negativos. Dentro de la utilización de modelos, podemos encontrar dos grandes grupos: el de neutralización y el de desplazamiento². Para el primer caso, el estudio de los números enteros se realiza con términos como: “deudas y haberes”, “pérdidas y ganancias”, “personas que entran o salen de un recinto”, etc., es decir, el número entero representa cantidades de magnitud que tienen el mismo sentido o sentidos opuestos. Para el segundo caso (que es el que nos interesa), el estudio de estos números se efectúa recurriendo al uso de la recta numérica e, igualmente, a términos como: “avanzar y retroceder”, “antes de Cristo y después de Cristo”, “subir y bajar”, etc., es decir el número entero indica posiciones o desplazamientos.

Dentro de la génesis del número entero se observa que la recta numérica fue una gran ayuda para que los matemáticos de siglos anteriores pudieran considerar a los negativos como números, además les permitió, en cierta medida, estudiarlos, entenderlos e intentarles dar una representación “concreta”. La escogencia del modelo parte del análisis hecho anteriormente, es decir, si los matemáticos de esos tiempos se apoyaron en la representación y en la recta numérica, puede suceder que este modelo sea también uno de los que brinde mejor entendimiento a los estudiantes en el manejo de ellos, y más aún si se maneja desde la perspectiva informática.

Cabe señalar, que el estudio de estos números se realiza solamente con instrumentos como lápiz y papel; entonces, es aquí en donde la investigación tiene su origen, planteando la problemática de los números negativos a partir de la utilización de un modelo empírico, el modelo de desplazamiento, apoyándose en el uso de las nuevas tecnologías. Además, pretende de que los estudiantes tomen conciencia en la utilización de los signos “+” y “-” “dentro del respectivo modelo, puesto que, como se verá a continuación, los signos toman tres clases de significados, según la utilización que estos reciban:

1. Signos ‘predicativos’ cuando indican la “positividad” o “negatividad” del número. Por ejemplo, en algunos libros, cuando se habla de -3 no se

² Esta clasificación es hecha por Cid (2001)

hace referencia al entero negativo -3 , sino que se hace referencia a una cantidad que disminuye, desciende, pierde, etc.³

2. Signos 'operativos binarios' cuando representan las operaciones binarias de suma o resta, por ejemplo: $3 - 7$, en este caso, el menos representa la operación de sustracción.
3. El signo menos entendido como parte de la representación escrita de los enteros negativos, por ejemplo: en (-3) , el cual, es simplemente un elemento de dicho conjunto. Ahora bien, se puede haber escrito $*3$ o $n3$ que también pertenecería a los enteros negativos, siempre y cuando se haya convenido tal notación.

Una vez visto lo anterior, se podría plantear la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué sucede cuando se utilizan las nuevas tecnologías computacionales para el estudio de los enteros?. En este caso surge, otro interrogante:

¿El modelo de la recta numérica, utilizado con la ayuda de un software de geometría dinámica, contribuye a mejorar el aprendizaje de los estudiantes, en cuanto hace referencia a los números enteros?

Ahora, se puede afirmar que los números negativos tienen diversas formas de tratarse o de explicarse dentro del salón de clases o fuera de él; esto siempre dependerá del profesor y de los intereses del mismo, además, la utilización de los modelos se ha convertido en una parte primordial en esta enseñanza, es por eso que surge la incógnita de saber qué pasa si esta utilización se la traslada a un software de geometría dinámica, ¿Tendrán los mismos resultados?, ¿Mejorarán?, o en el caso extremo, ¿Empeorarán?.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo General

Describir y caracterizar el aprendizaje y la enseñanza de los números enteros, tanto en su conceptualización como en circunstancias que involucran la adición y sustracción de los mismos, mediante el uso del software de geometría dinámica Cabri II Plus y el modelo de desplazamiento.

1.2.2 Objetivos Específicos

1. Realizar un estudio teórico de los elementos que se emplean en el aprendizaje y en la enseñanza del conjunto de los números enteros, tanto en

³ En el mundo anglosajón los números enteros se suelen introducir mediante una notación que diferencia los signos predicativos de los operativos binarios: los primeros se escriben en forma de exponentes situados a la izquierda del número

su conceptualización como en circunstancias que involucran la adición y sustracción de los mismos, al utilizar un modelo concreto (modelo de desplazamiento).

2. Diseñar e implementar talleres para el aprendizaje y la enseñanza del conjunto de los números enteros, tanto en su conceptualización como en circunstancias que involucran la adición y sustracción de los mismos, utilizando el software geométrico Cabri II Plus y el modelo de desplazamiento.

3. Identificar los beneficios o las dificultades que se presentan en el aprendizaje y en la enseñanza del conjunto de los números enteros, tanto en su conceptualización como en circunstancias que involucran la adición y sustracción de los mismos, al utilizar el software geométrico Cabri II Plus y el modelo de desplazamiento.

2. MARCO EMPÍRICO REFERENCIAL

2.1 ANTECEDENTES

La problemática de la enseñanza de los números enteros ha sido, para los educadores matemáticos, un problema de investigación bastante fructífero en distintos países. A continuación se presentan algunas de las investigaciones que se han desarrollado respecto a esta temática, las cuales, aportan valiosos elementos a esta investigación:

2.1.1 Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos (Cid, 2001):

En este trabajo Cid realiza un estudio detallado de los modelos de enseñanza, centrándose principalmente en los modelos concretos, como son el de desplazamiento y el de neutralización. En el primer modelo se enfatiza la enseñanza de los negativos con ayuda de la recta numérica y con términos como: avanzar y retroceder, bajar y subir; en el segundo, el estudio se realiza apoyándose en términos tales como: deudas y bienes, ganancias y pérdidas, entre otros. Además, se analizan ventajas e inconvenientes del trabajo con estos modelos, su aplicación en el salón de clases y los resultados de dichas aplicaciones.

De esta manera, la investigación descrita amplía y profundiza el conocimiento respecto a los modelos que se pueden utilizar en el momento que se requiera hacer el trabajo con los estudiantes, es decir, aporta bases para indagar que tan provechoso o perjudicial puede ser la utilización de estos modelos para la enseñanza de los números negativos.

2.1.2 La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión (Cid, 2003):

El trabajo enfatiza su contenido en las propuestas de enseñanza; también realiza una pequeña clasificación de las propuestas para la introducción de la multiplicación de los números enteros tales como: Introducción inductiva, la cual se da por descubrimiento y generalización de regularidades; introducción deductiva, que consiste en añadir los simétricos de los números naturales respecto a la suma, conservando las propiedades que se presentan en el conjunto de números naturales; introducción constructiva, la cual, se basa en la simetrización del conjunto de los números naturales respecto a la suma, construyendo los enteros como conjunto cociente de pares ordenados de naturales respecto a la relación de equivalencia: (a,b) equivalente a (a',b')

si, y sólo si, $a+b'=b+a'$; y, finalmente, por medio de modelos, tales como los ya nombrados anteriormente.

Lo anterior permite tener un manejo más objetivo y profundo respecto a las diferentes situaciones problema que se pueden presentar en el trabajo con números negativos; en otras palabras, permite inquirir sobre los diferentes caminos que puede tomar la enseñanza de los números negativos en el salón de clases, a su vez, ayuda en el análisis y en el manejo de estos, desde diferentes puntos de vista.

2.1.3 Números Enteros (Vargas, 1990):

Libro en el cual se realiza un estudio amplio y detallado del tema de los números enteros, sus orígenes, desde las primeras civilizaciones que los utilizaron, pasando por el rechazo total, hasta la fecha que fueron aceptados como números; su enseñanza, es decir, hace referencia a los diferentes modelos utilizados en estos días para abordar el tema de los enteros, explicando las ventajas y desventajas que se presentan en su utilización.

Lo señalado anteriormente, constituye el principal aporte de dicho libro a esta investigación, pues, como ya se dijo, el principal objetivo es indagar qué tan efectivos o no, son los modelos en la enseñanza de los números enteros. Asimismo, el texto presenta algunas interpretaciones formales del concepto de número entero, entre ellas se puede citar: la simetrización del semigrupo de los números naturales, los pares ordenados como operadores y el número entero como objeto matemático construido axiomáticamente, entre otros temas. Ahora bien, se puede observar que para realizar el trabajo con los números enteros en el salón de clase, se debe tener muy claro el concepto de estos, además de sus propiedades; siendo este otro de los principales aportes del libro.

2.2 MARCO CONTEXTUAL

2.2.1 Entorno general

2.2.1.1 Identificación y ubicación

San Juan de Pasto, capital del departamento de Nariño, está ubicada en el Sur Occidente Colombiano a 2534 metros de altura sobre el nivel del mar, más específicamente en el Valle de Atriz⁴. Cuenta con una población aproximada de 382.618 habitantes (censo 2005, DANE) y es una de las ciudades más antiguas de Colombia.

En la antigüedad fue habitada por los Pastos y los Quillacingas, quienes desarrollaron una actividad económica basada en la agricultura, la alfarería y la metalurgia. La zona urbana del municipio se conforma de una división

⁴ Valle de Atriz significa Rio Azul

político-administrativa del área urbana porque está dividida en doce comunas de acuerdo al Título II del componente urbano del plan de ordenamiento territorial, Pasto 2012: Realidad posible, en su capítulo I. En cuanto a la zona rural, el municipio se encuentra rodeado por los corregimientos Canchala, Cujacal, San Juan de Anganoy, San Fernando, Cabrera, Genoy, San José de Catambuco, Jamondino, Gualmatan, Puerres, San Pedro de la Laguna, Tescual, Obonuco, Buesaquillo, La Caldera, El Encano, Morasurco y El Socorro, los cuales, son sectores prósperos para la agricultura y que en otros tiempos fueron pilares fundamentales ante el acoso funesto de las tropas libertadoras.

2.2.1.2 Aspectos Socioculturales

El municipio de Pasto, tiene sitios de interés, entre ellos, la ciudad misma, con su contraste entre lo colonial y lo moderno, numerosos sitios para su comercio y esparcimiento, su gastronomía con su famoso cuy asado, y en cuanto a sus artesanías destacándose el ya conocido Barniz de Pasto, pintorescos paisajes de sus alrededores, Volcán Galeras y Lago Guamuéz. El aspecto cultural de la ciudad está enmarcado en lo siguiente: Carnavales de Negros y Blancos, arquitectura religiosa, museos, bibliotecas, literatura y centros educativos.

2.2.1.3 La Educación en San Juan de Pasto

Con el desarrollo de la educación en Colombia en el siglo XIX, se puntualiza que tales procesos tuvieron repercusiones en Pasto y poblaciones vecinas, tanto en la apertura de las escuelas primarias como colegios de segunda enseñanza, en razón del tradicional interés por la educación, demostrado por sus vecinos.

Es así, que en el año de 1842 el plan de estudios del doctor Mariano Ospina Rodríguez, motivó el funcionamiento de establecimientos de enseñanza primaria y secundaria tanto en Pasto como en otras poblaciones del sur, de tal forma que los establecimientos de segunda enseñanza estimularon en la sociedad pastusa la formación académica de la juventud. A partir de entonces la enseñanza secundaria hace parte del proceso educativo, por lo cual, el 21 de septiembre de 1925 la compañía de Jesús hizo entrega del seminario para regentar su propio colegio, fecha desde la cual lleva la denominación de “Colegio San Francisco Javier”. En la actualidad brinda niveles de preescolar, primaria y secundaria. Por las mismas fechas los congregantes del oratorio San Felipe Neri regentan su propio colegio, que lleva el nombre del fundador de la congregación. En la actualidad funciona en un amplio espacio de campo. Similarmente sucede con instituciones como las Bethlemitas, la cual funciona con modernas instalaciones construidas bajo la acción de la comunidad, el instituto Champagnat (denominado en 1951 con este nombre), entre otros.

En 1701, Fernando López de Andrada, cedió por escritura pública la casa y solar donde hoy se levanta el edificio de la Universidad de Nariño, la cual fue creada el 7 de noviembre de 1904, fecha en la cual el doctor Julián Bucheli con genial visión, con miras de inmediato futuro y prosperidad regional en su condición de primer gobernador del departamento de Nariño, dictó el decreto No 49 de 1904 “ por el cual se crea la Universidad de Nariño en la capital del departamento” la cual ha sido y seguirá siendo el eje de la cultura a través de la vida republicana en el sur de Colombia. En la actualidad la ciudad de San Juan de Pasto cuenta con un número de 75 instituciones educativas, 19 de las cuales son privadas, para los estudios técnicos o profesionales existen sedes de 10 universidades o centros de estudios superiores, siendo el principal la Universidad de Nariño.

2.2.2 Entorno Específico

2.2.2.1 Corregimiento de Cabrera

El corregimiento de Cabrera está ubicado en el Corredor Oriental a una altura de 2.820 m.s.n.m y una temperatura promedio de 12°C. En su área rural, este Corredor está localizado al oriente de la ciudad de Pasto; se comunica por la carretera que conduce al Corregimiento de El Encano y Mocoa (Putumayo). Sus límites geográficos son: al norte, con el Municipio de Buesaco, Vereda San Isidro, al sur, con los Corregimientos de Catambuco y El Encano, al oriente, con el Corregimiento de El Encano y al occidente con la Vereda Cujacal Centro y Cujacal Alto, Ciudad de Pasto.

Cabrera es constituido por cinco veredas, de cuya composición, la cabecera es Cabrera Centro; La Paz, Duarte, Buenavista, y Purgatorio, son las otras cuatro. El corregimiento de Cabrera cuenta con un área de 1.959,4 Hectáreas, equivalente al 1.40% del área total del municipio de Pasto y presenta una población aproximada de 1560 habitantes. Los principales cultivos en el corregimiento de Cabrera son: cebolla, maíz, papa, hortalizas, sin embargo, se ve en mínima escala algunos cultivos de arveja, haba, frutales (mora, ciruela, manzana, pera, etc.). Además, es un sitio turístico para los fines de semana, ya que cuenta con una excelente gastronomía y belleza en sus paisajes. Igualmente, es un potencial hídrico, puesto que está rodeado de zonas montañosas.

2.2.3 Institución Educativa Municipal Cabrera

La IEM Cabrera está ubicada en la parte central del corregimiento de Cabrera, ofrece sus servicios en preescolar, primaria y secundaria; su modalidad es comercial, por lo que su educación está orientada al emprendimiento empresarial y comercial (herramientas conceptuales que permiten el aprovechamiento de las riquezas del corregimiento).

En la actualidad el rector de la IEM cabrera es el licenciado en matemáticas y especialista en TIC Oscar Alberto Narváez Guerrero. Además, cuenta con una planta docente de 14 profesores y cuatro funcionarios administrativos; dentro de las estrategias curriculares de la institución está el desarrollo de proyectos en diferentes áreas tales como: medio ambiente (PRAE), educación sexual, aprovechamiento del tiempo libre, educación ciudadana, etc.

2.3 MARCO LEGAL

2.3.1 Constitución Política de Colombia

En el texto de la Constitución Política de 1991 (C.P) la educación no está contemplada dentro del capítulo que habla de los derechos fundamentales, pero aparece en el capítulo de los derechos sociales, económicos y culturales, donde es considerada un derecho fundamental de los niños y niñas.

Artículo 44: “Son derechos fundamentales de los niños: la vida, la integridad física, la salud y la seguridad social, la alimentación equilibrada, su nombre y nacionalidad, tener una familia y no ser separados de ella, el cuidado y amor, la educación y la cultura,”

Artículo 67: “La educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura.

La educación formará al colombiano en el respeto a los derechos humanos, a la paz y a la democracia y en la práctica del trabajo y la recreación, para el mejoramiento cultural, científico, tecnológico y para la protección del ambiente.

El Estado, la sociedad y la familia son responsables de la educación, que será obligatoria entre los cinco y los quince años de edad y que comprenderá, como mínimo, un año de preescolar y nueve de educación básica.

La educación será gratuita en las instituciones del Estado, sin perjuicio del cobro de derechos académicos a quienes puedan sufragarlos.

Corresponde al Estado regular y ejercer la suprema inspección y vigilancia de la educación con el fin de velar por su calidad, por el cumplimiento de sus fines y por la mejor formación moral, intelectual y física de los educandos; garantizar el adecuado cubrimiento del servicio y asegurar

a los menores las condiciones necesarias para su acceso y permanencia en el sistema educativo...”

2.3.2 Ley general de educación

La ley general de educación “ley 115, del 8 de febrero de 1994” fue el resultado de una amplia discusión y en ella buscaron integrar elementos consecuentes con el desarrollo institucional, relacionados con la participación, la paz, los derechos humanos y la democracia. Está ley señala las normas generales para regular el servicio público de la educación que cumple una función social.

Algunos temas de los que trata la ley son los siguientes:

- Definición del servicio educativo.
- Fines de la educación.
- Competencias generales de la comunidad educativa, la familia y la sociedad.
- Estructura del servicio educativo.
- Organización para la prestación del servicio educativo.
- La conformación del gobierno escolar.

En la misma ley, lo concerniente a las nuevas tecnologías se lo encuentra en el artículo 23 donde la tecnología e informática es un área obligatoria y fundamental. Para ello se propone una estructura de contenidos coherentes que se inicia con fundamentos de cultura en la tecnología de la computación como son sus orígenes y evolución, pasa por los avances de nuestros días con los programas de aplicación más utilizados y culmina con los fundamentos de la programación.

2.3.3 Decreto 1860 de 1994

Por el cual se reglamenta parcialmente la Ley 115 de 1994, en los aspectos pedagógicos organizativos generales.

En este decreto el acceso a la tecnología está enmarcado en el capítulo V, orientaciones curriculares, en el Artículo 45. Material y Equipo Educativo, en el cual se define como material o equipo educativo a las ayudas didácticas o medios que faciliten el proceso pedagógico.

Se distinguen 2 tipos de materiales: los de dotación personal (cuadernos, instrumentos de escritura, las carpetas o sistemas de archivos, etc.) y los de dotación institucional (ayudas visuales y auditivas, equipos de talleres y laboratorios, microcomputadores, entre otros).

2.4 MARCO TEÓRICO

2.4.1 Génesis del número negativo

“Los números negativos, los irracionales y los complejos se oponen a los números racionales positivos y a los naturales, tanto en la forma como aparecieron, como en la época de surgimiento. Los números naturales y los racionales positivos, tienen su origen en el manejo de magnitudes (necesidad de cuantificación), mientras que, los enteros negativos, los irracionales, y los complejos, surgen en la manipulación algebraica, es decir, en la resolución de ecuaciones. Los enteros por fin tuvieron su aceptación, cuando los matemáticos dejaron de buscarlos en la naturaleza, dándose cuenta de que se trataban de creaciones intelectuales, con lo cual, hubo una inversión en la forma de ver la relación entre lo real y lo formal” (Vargas, et al., 1990).

2.4.1.1 Civilizaciones Griega, Hindú, Árabe y Época Medieval

La civilización griega explicaba que todo en la naturaleza se regía por la matemática, así por ejemplo, los pitagóricos sostenían que: *“TODO ES NÚMERO”*. Descubrieron las magnitudes inconmensurables (cuya razón no es expresable por un número natural, Ej. medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo) creando un conflicto entre lo que habían descubierto y su realidad. Eudoxo de Cnido solucionaba el problema eludiendo a las magnitudes, considerándolas solo geométricamente. Con lo cual, la consideración de no contar con los negativos, era tal vez, que no se podían representar gráficamente mediante un segmento.

Los matemáticos del periodo alejandrino (300 a.c), influenciados por los egipcios y babilonios, se dedicaron a resolver problemas prácticos, además, hicieron un desarrollo del álgebra sin usar la geometría. Diofanto (250 a.c), se suele considerar como el creador del álgebra, puesto que, creó una escritura abreviada para las potencias, cantidades desconocidas y además resolvió ecuaciones algebraicas sin utilizar la geometría. En su obra cita una regla para el producto de diferencias, lo cual puede ser el germen de la famosa ley de signos, la regla dice: *“SUSTRACCIÓN POR SUSTRACCIÓN DA ADICIÓN”*, pero esto no quiere decir que él conocía a los negativos, ya que, éste se refería a diferencias y no a los números negativos como entidades aisladas; asimismo, él consideraba solo las raíces positivas, lo que prueba lo dicho anteriormente.

Es decir, los números negativos están ausentes en la matemática griega, debido a que los griegos estaban muy ligados a la geometría, caso contrario de los alejandrinos, los cuales, no estaban tan ligados con la geometría para resolver sus problemas prácticos, pero a pesar de esto, Diofanto no tuvo oportunidad de ampliar el campo de los números (si sus problemas eran prácticos, los números negativos no tenían lugar en ellos).

En cuanto a los hindúes, crearon el sistema posicional base 10, lo cual les permitió mayor agilidad en la realización de cálculos, conjuntamente, ellos forjaron unos nuevos símbolos para representar la ausencia (además de la invención del cero), que más adelante, en occidente, serían reconocidos como los Negativos. Por otro lado, se cree que los chinos representaban a los negativos con varillas negras y a los positivos con varillas rojas, mostrando así un cierto manejo de estos números. Pero fue en una obra de Brahmagupta (año 628) donde los negativos y sus reglas aparecen en forma explícita. En esta obra, se habla de cómo sumar, restar, multiplicar, dividir, manejar la potenciación y extracción de raíces, identificando a los positivos como "*Los Bienes*", a los negativos como "*Las Deudas*" y al cero como "*La Nada*". Por otro lado, los hindúes introdujeron en el álgebra algunas abreviaturas y simbología para las operaciones. Se dice que todos esos avances fueron posibles gracias a su despreocupación por el rigor y la fundamentación lógica.

Dentro de la civilización árabe se encuentra Al-Kwarizmi, quien escribió diversos tratados de astronomía y dos libros: uno de Aritmética y otro de Álgebra, los cuales tuvieron gran influencia en la matemática de finales de la edad media y principios del Renacimiento. Al-Kwarizmi y los árabes se oponían a Brahmagupta y los hindúes, ya que estos no consideraban raíces negativas, ni utilizaban ningún tipo de simbología o abreviaturas, por el contrario utilizaban una álgebra retórica. En el álgebra árabe se presentó influencia de los babilonios, de métodos griegos (resolución algebraica de ecuaciones mediante la geometría) y del álgebra hindú (métodos de resolución numérica). Como ya se dijo, la no utilización de los negativos se debió posiblemente a la relación que ellos manejaban entre número y magnitud o por la practicidad de sus problemas en la realidad (posiblemente el álgebra nació por la necesidad de resolver problemas de herencias). Esto no quiere decir que no los conociesen, por el contrario, tenían grandes conocimientos acerca de estos, aunque solo los ignoraban.

En la época medieval, el fanatismo religioso impidió que Europa surgiera (los árabes eran catalogados como hijos de Satán), lo que llevó a que occidente no se beneficiara de lo que habían hecho los hindúes; asimismo, la "aritmética elemental" solo era un saber para personas privilegiadas (calculistas) y no para todo mundo. Leonardo de Pisa (Fibonacci), quien tuvo la oportunidad de viajar por Egipto, Siria, Grecia y Sicilia, conoció la matemática árabe, aprendiendo el método de cálculo de los hindúes. En 1202 convencido de lo hecho por los hindúes, escribió su obra "*Liberabaci*" (*Libro del Ábaco*), en el cual, expone el sistema de numeración hindú, explica los algoritmos de cálculo y sus aplicaciones comerciales. Al igual que los árabes, Fibonacci no consideraba la existencia de raíces negativas, aunque según historiadores, en un problema interpretó a un número negativo

como pérdida. Por tanto, si en tiempos anteriores se los rechazaba como entes aislados, en esta época ni siquiera se los llegaba a considerar.

2.4.1.2 Siglos XV a XVII

Con la invención de la imprenta, se dieron a conocer muchos tratados griegos que fueron traducidos en la época medieval, aunque los primeros sean aquellos de origen árabe (álgebra y aritmética), tal vez por su “sencillez” a la hora de estudiarlos (cálculos prácticos). Además, se desarrolla el álgebra y con ello reaparecen los números negativos, eso sí, con cierto rechazo y cierta tolerancia (denominados entes falsos, ficticios o absurdos). Se cree que el nombre de “negativos” provenga de esta época, ya que éstos, eran los valores negados cuando aparecían como raíces de una ecuación; por otro lado, aunque eran rechazados, se trabajaba con ellos. Se cree que el primer número negativo apareció en una ecuación algebraica en el “*Triparty*” (Nicolás Chuquet), obra en la cual aparece: $4X = -2^5$.

Los símbolos “+” y “-” tuvieron una gran ayuda de la obra “*Aritmética Integral*” (Michael Stifel) para su popularización; en ésta, se mostraba el conocimiento sobre la aritmética de los negativos, además, se los admitía como coeficientes en las ecuaciones y se operaba con ellos, pero se los rechazaba como raíces de una ecuación (*Numeri Absurdi*). Con la publicación del “*Ars Magna*”, escrita por Giordano Cardano, se da un avance muy significativo en el álgebra ya conocida (álgebra árabe). A pesar de esto, Cardano no consideraba a los negativos como coeficientes en las ecuaciones algebraicas, en cambio sí admitía las raíces negativas considerándolas como ficticias, llegando a enunciar la regla de los signos.

Rafael Bombelli, en su libro “*Algebra*”, intentó clarificar las reglas aditivas de los negativos a través de haberes y deudas. Sin embargo, Francois Viète⁶, considerado el padre del álgebra simbólica, no consideró a los negativos ni como raíces ni como coeficientes. S. Stevin aceptó a los negativos como raíces y como coeficientes de ecuaciones, igualmente, los utilizó como instrumentos de cálculo, admitió además, la adición $X + (-Y)$ en lugar de una resta $X - Y$ e intentó justificar geométricamente la regla de los signos. Stevin carecía de significado para los negativos y en cuanto a las raíces negativas decía que eran las raíces positivas de su transformada:

Si “-a” es solución de $X^2 + PX = Q$ entonces “a” es solución de $X^2 - PX = Q$

Igualmente, consideró que los negativos no son fiables, esto debido posiblemente a su forma de pensar: “*Un número es aquello que expresa cantidad*”

⁵ Se debe tener en cuenta que para esta época no había simbolismo matemático

⁶ Matemático más brillante de finales del siglo XVI

Dentro del siglo XVII, se encuentra Galileo Galilei, uno de los pioneros de la Física y defensor de la idea de que todas las ramas de la ciencia deberían ajustarse a un modelo matemático, como también de la teoría heliocéntrica de Copérnico; además, señaló el objetivo de la ciencia: *“El libro de la naturaleza está escrito con signos matemáticos”*. Entre los aspectos más importantes de esta época se encuentran: el surgimiento del cálculo infinitesimal, la teoría de números y el álgebra como rama independiente, sin olvidar que el surgimiento de la Geometría Analítica se dio también en este siglo. Los métodos de cálculo florecieron en todas sus variantes: algebraico, aritmético, infinitesimal y probabilístico. Por ende, los negativos y los imaginarios fueron encontrando espacios de actuación, aunque con cierto rechazo, ya que no se les podía justificar como números. Sin embargo, su eficacia, hizo que los matemáticos intentaran darles justificación e interpretación, dando así origen a los primeros pasos en el camino hacia su legitimación como números.

En primera instancia, son considerados como artificios de cálculo. Hacia finales del siglo XVII los negativos no aparecían en el diccionario de J. Ozanam, como vocablo “Número”, pero sí como “Raíz” (raíces falsas). Pero sin importar esto, era un hecho que los negativos eran de gran ayuda en donde se les utilizara. Albert Girard, es el primero que aceptó la utilidad algebraica de las raíces negativas e imaginarias, con lo cual, permitió la resolución general y la construcción de las ecuaciones a partir de sus raíces. Por otro lado, John Wallis (matemático inglés más importante anterior a Newton) aceptó a los negativos con todas sus consecuencias, operó con ellos y dio reglas para operar con potencias negativas. Por tanto, los números negativos son aceptados y utilizados como números, gracias a su posibilidad y eficacia.

En segunda instancia eran rechazados por no encontrarles justificación intuitiva y empírica (aunque eran utilizados), puesto que, la concepción que se tenía de número era que representaba cantidad: *“No pueden existir números menores que nada”*, (Descartes) *“He conocido algunos que no podían entender que al restar cuatro de cero quede cero”*, (Pascal). Pero matemáticos como Leibniz, superaron el problema, dando más peso a lo formal que al contenido. Descartes al igual que Stevin, los evitó, transformando las ecuaciones con raíces negativas en ecuaciones con raíces positivas.

En tercera instancia eran una necesidad algebraica, pero lo que condujo a que los negativos tuvieran un mayor peso, fue la necesidad algebraico – geométrica que se inició en el siglo XVII. Girard interpretó al número negativo geométricamente, como un *“retroceso”* y a lo positivo como un *“avance”*, anticipándose a ideas que se originaron en el siglo XVIII. Fue con la ayuda de la geometría y del álgebra, que los negativos tuvieron una

interpretación geométrica (abscisas de puntos). Descartes aunque reconocía que las ordenadas negativas tenían sentido opuesto a las positivas, nunca consideró abscisas negativas. Newton (primero en utilizar las coordenadas cartesianas como las conocemos ahora), en su obra “Enumeratio linearum tertii ordinis” (escrita en 1676), se dedica al estudio y representación de curvas planas. Con la recta numérica, los negativos adquieren sentido geométrico, pues si 4 es la coordenada del punto P, entonces -4 es la coordenada del punto Q, el cual se encuentra a la misma distancia del origen, pero en la semirrecta opuesta.

Aunque los negativos eran aceptados por algunos matemáticos, también eran rechazados por otros, y con el surgimiento de la recta numérica fueron adquiriendo cada vez más fuerza entre los matemáticos.

2.4.1.3 Siglo XVIII

Se crean nuevos campos de estudio (ecuaciones diferenciales, teoría de variable compleja, series infinitas), pero muchos de los obstáculos⁷ que se habían presentado en el siglo anterior, seguían atormentando a los matemáticos de este periodo. En este periodo se crearon las Academias, las cuales, recolectaban a los “talentos” de la época, dejando así de ser matemáticos “amateurs”, para convertirse en profesionales, es decir, la enseñanza inicia un proceso de extensión; además, se produjo la creación de nuevos y mejores textos por parte de los matemáticos.

Por otro lado, muchos de los contenidos matemáticos de épocas anteriores comenzaron a ser criticados⁸ por no tener un rigor o una base formal, lo que condujo a que los matemáticos intentaran dar rigor a todos los contenidos matemáticos. Un hecho relevante es el surgimiento del término “*Metafísica*”⁹, que era utilizado cuando la razón no era suficiente para justificar una argumentación.

En los inicios del siglo XIX la tónica era igual, ya que los matemáticos querían desarrollar todas sus teorías, demostraciones, etc. con cierta aplicabilidad en la vida real, lo que condujo a que contenidos matemáticos como los negativos, los imaginarios, los infinitésimos fueran ignorados o fracasaran; como dice Morris Kline “*Los matemáticos no supieron apreciar que esos conceptos no estaban basados en la experiencia inmediata, sino que eran creaciones de la mente*”. Cabe señalar, que para este siglo los Irracionales ya eran aceptados, pues podían ser interpretados como medidas de magnitudes, aunque carecían de justificación lógica; lo que no sucedía ni con

⁷ Aun se concebía la idea de que había un ser supremo que creó el universo matemáticamente

⁸ Un ejemplo es el cálculo infinitesimal, criticado por el obispo Berkeley en su obra “*El analista o un discurso dirigido a un matemático infiel*”, otro ejemplo es el de las series infinitesimales, las cuales originaron muchas paradojas, entre otros ejemplos.

⁹ Metafísica: Cuerpos de verdades que existen fuera de la razón

los negativos ni con los imaginarios, ya que éstos no eran aceptados. Esto no quiere decir que no hicieron nada por ellos, al contrario, dieron inicio a un trabajo más arduo, el cual se encaminaba en el intento de legitimarlos. El trabajo se orientaba en dos sentidos: dando interpretaciones concretas de los negativos y tratando de justificar lógicamente sus propiedades, en especial la ley de los signos.

D’Alambert afirmó que las cantidades negativas son aquellas que son observadas como menores que nada y que están precedidas del signo menos; asimismo, se manejaban dos concepciones acerca de los negativos: como objetos conceptuales y como objetos materiales; a favor de esta última se encuentra la siguiente interpretación: *“Las cantidades negativas hacen lo contrario que las cantidades positivas”*, en donde el positivo acaba, el negativo comienza. Para D’Almabert la aparición de una raíz negativa implicaba la transformación de su enunciado, para así, desaparecer las raíces negativas

$$X + 100 = 50 \Rightarrow X = -50 \quad \rightarrow \quad 100 - X = 50 \Rightarrow X = 50$$

Es decir, para D’Alambert las cantidades negativas son cantidades positivas, sino que han sido puestas en una falsa posición; el signo “-“ en una respuesta, es con el fin de enderezar la hipótesis del problema pasando a una sustracción natural, además, D’Alambert no concebía al negativo como número, sino que lo concebía como una cantidad negativa en ciertas situaciones, es decir, prescinde de los negativos, transformando todo problema de manera que sus soluciones sean positivas (con lo que se creería que se elimina los negativos); además, concluía que aunque los negativos no eran aceptados, eran utilizados por toda su estructura operacional, ya que ésta, era correcta, con lo cual, estos tenían que ser aceptados y admitidos por todo el mundo.

Pero su interpretación, concepción y aceptación siguió en problemas. Euler en su “Introducción completa al álgebra”, desconfió de los números negativos y los evitó, además, se las ingenia para que todas las ecuaciones de primer grado tengan raíces positivas. Esto no quiere decir que no los utilizaba en su totalidad, al contrario, los empleaba solo como símbolos. En cuanto a su legitimación, buscaron darles una interpretación física, con el fin de que su enseñanza sea más natural y no tan formal. Algunas nociones eran interpretadas en lo real y otras eran aceptadas aunque no tuviesen significado en el mismo.

Por el lado de la interpretación física, los negativos eran utilizados como símbolos formales, que en ciertos contextos tenían interpretaciones particulares, pero más allá de esto, el problema era encontrarles una interpretación física (toda la matemática se quería explicar con ayuda de la realidad); ahora, al obstáculo de considerar al número negativo como una

cantidad menor que nada, se le añaden otras concepciones como: la concepción de un cero relativo y no absoluto. C. McLaurin afirmaba que las cantidades negativas si existían, pero no en el mismo sentido de las positivas, puesto que, las primeras en su versión aislada carecían de significado y solo lo poseían en situaciones como las de comparaciones, las de deudas y haberes, las de avanzar y retroceder, etc., lo que no pasaba con las otras. Cabe resaltar que en esta fase no se habla de número, sino de cantidad, es decir, el ligamento que había entre número y cantidad aún no se rompía; asimismo, se observa que para ellos los signos y los números pertenecen al plano abstracto y las cantidades al plano concreto.

Agustín Cauchy mostró en su “*Cours d’analyse*”, que expresiones como $\sqrt{-1}$ debían ser rechazadas o repudiadas, puesto que, no se sabía que querían decir, ni qué sentido se les podía dar. Con respecto a los negativos, afirmó que la idea de cantidad negativa o positiva surge de considerar que cada magnitud de una especie se la puede considerar como crecimiento o decrecimiento de otra magnitud fija de la misma especie.

Por otro lado, McLaurin, Cauchy y Euler intentaron justificar la regla de los signos; McLaurin afirmaba en su obra “*Teoría de Fluxiones*”: “*Las matemáticas tratan de relaciones entre cantidades y entre sus propiedades, las cuales pueden estar sometidas a unas reglas o medida*”, pero no es necesario “*que ellas existan fuera de nosotros*”. Es decir, la confirmación es algo ventajoso pero no esencial. Euler¹⁰ reconoció la utilidad de las matemáticas en cuanto a su aplicación, pero también el papel de ellas fuera de este campo; además, rechazó a la geometría como soporte del cálculo (puesto que trabaja solo algebraicamente) y justificó algunas reglas.

Partiendo de la justificación concreta de $(-a)$, justificó $(-a)(+b) = -ab$ (por conmutatividad de la multiplicación) y $(-a)(-b) = ab$ como consecuencia de que el resultado en valor absoluto es ab y por eliminación, el signo de $(-a)(-b)$, ha de ser positivo. Euler creía que los negativos eran mayores que el infinito y menores que cero¹¹.

$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ y si $x = 2$ entonces $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ de donde concluye que $-1 > \infty$.

Cauchy también intentó dar justificación a la regla de los signos, adoptando un punto de vista formal de la siguiente manera:

Sea A una cantidad o número cualquiera, y se hace $a = +A$, $b = -A$, entonces se tendrá:

¹⁰ Le debemos la invención de algunos símbolos, por ejemplo el símbolo “e”, entre otros.

¹¹ Euler, además pensaba que el infinito, al igual que el cero, dividía a los positivos de los negativos

$$+a = +A$$

$$-a = -A$$

$$+b = -A$$

$$-b = +A$$

Y si en las cuatro ecuaciones anteriores se reemplaza a y b por sus valores se tendrá:

$$+ (+A) = +A$$

$$- (+A) = -A$$

$$+ (-A) = -A$$

$$- (-A) = +A$$

Y a continuación afirma: “*La inspección de las ecuaciones anteriores es suficiente para establecer la regla de los signos expresada en el teorema: el producto de dos signos semejantes es siempre +, y el producto de dos signos opuestos es siempre menos*”.

2.4.1.4 Siglo XIX

Entre 1820 y 1830, surgió con fuerza la necesidad de fundamentar lógicamente a la matemática, sin ayuda de la intuición, llegando incluso a evitar las interpretaciones y el uso de figuras geométricas en las demostraciones, es decir, se buscaba ya el rigor de la matemática, despreocupándose un poco de la aplicabilidad de esta en la vida real, lo que se demuestra con la invención de las geometrías no euclídeas y el desarrollo del algebra abstracta. Pero había matemáticos que seguían en la idea de que las matemáticas “*demuestran verdades*”, oponiéndose y llegando a negar la existencia de temas dichos anteriormente (como es el caso de los negativos e imaginarios). En otras palabras, el punto principal de los matemáticos del siglo XVIII era la resolución de problemas de la vida real, lo que no pasaba con los del siglo XIX, ya que estos, buscaban el rigor de las matemáticas y la separación con la ciencias experimentales, es decir, una matemática más formal. Por otro lado, los matemáticos comenzaron a darse cuenta de que los objetos de su trabajo son creaciones intelectuales y que por tanto, no tenían que buscar la aplicabilidad de estos en la vida real, G. Cantor, creador de la teoría de conjuntos, afirma: “*La esencia de las matemáticas es libertad*”.

Lo increíble es que hacia finales de este siglo, habían muchos matemáticos en que dudaban de la separación de las matemáticas y las ciencias, Kronecker en 1888 escribió: “*Las especulaciones matemáticas unilaterales e introspectivas conducen a campos estériles*”.

Con la creación de la teoría de Cantor, surgió entre los matemáticos la siguiente idea: ¿Cuál es la naturaleza de las matemáticas?, surgiendo tres formas de entendimiento de las mismas: la Formalista, la intuicionista y la Logicista¹². Igualmente, en este siglo surgieron los algebristas, analistas, geómetras, lógicos..., es decir, la especialización de cada matemático en una rama en particular, conjuntamente los números comenzaron a ser

¹² En las tres formas subyacía la idea de que las matemáticas no son una ciencia natural, por el contrario son una creación intelectual del hombre. Según Bertrand Rusell (1901), este es uno de los más grandes descubrimientos del siglo XIX

legitimados, lo curioso es ver el orden: primero fueron los complejos¹³, luego los irracionales, luego los negativos y después los racionales. Como también, se puso en mesa de discusión temas como el concepto base del álgebra, el análisis y los sistemas numéricos (concepto de número natural).

Lo que permitió superar en gran medida el problema con los negativos, fue la contribución que realizó la obra de Hermann Hankel publicada en 1867: *“Teoría del sistema de los Números Complejos”*¹⁴, en la que señala: *“La condición para construir una aritmética universal es, por tanto, la de una matemática puramente intelectual, separada de todo tipo de percepciones sensibles”*. Hankel no se preocupó en buscar explicación a los negativos en la cotidianidad, sino que los buscó cimientos en el *“Principio de Permanencia”*¹⁵, el cual había sido introducido por George Peacock (1791 – 1858) años antes, para poder fundamentar el álgebra y justificar las operaciones con expresiones literales. Además, Hankel siguiendo lo que había hecho Peacock, formuló el principio de permanencia de las leyes formales que establecen el criterio general de algunas ampliaciones del concepto de número.

- La palabra número responderá a símbolos o agregados de símbolos que no necesariamente representan números del campo numérico previamente dado o conocido, sino que su significado puede ser cualquiera.
- Se definirán para el nuevo campo numérico las operaciones fundamentales de la aritmética (adición y multiplicación) y el concepto de igualdad, de manera que se conserven las definiciones en el campo menos amplio como caso particular de las nuevas definiciones y que subsistan las leyes formales de uniformidad, asociatividad, conmutatividad, distributividad y conservación del elemento neutro

Después de esto, los negativos fueron admitidos completamente dentro de las matemáticas, sin embargo carecían de una definición rigurosa y explícita, es decir, eran utilizados solo como símbolos. Pero, los negativos siguieron creando desacuerdos entre los matemáticos, aunque esto no impidió que la idea de Hankel de derivar su existencia y sus propiedades por extensión de lo permitido en los naturales fuera descartada, por el contrario,

¹³ Wessel (1745 – 1818) y Argand (1768 – 1822) le asignan una interpretación geométrica a estos números. En 1831 Fue redescubierta y al fin popularizada por Gauss. Ahora la fundamentación de los mismos, fue proporcionada por Hamilton (1805 – 1865). En vez de $a + b\sqrt{-1}$ considera los pares ordenados de números reales (a, b) , y define sus operaciones, dando como resultado un trabajo similar al de la primera representación.

¹⁴ Con ella se dio un salto de lo concreto a lo formal, lo que permitirá justificar los diversos sistemas numéricos.

¹⁵ *“Todo los resultados del álgebra aritmética que se deducen por aplicación de sus reglas, y que son generales en su forma aunque particulares en su valor, son igualmente resultados del álgebra simbólica, donde son generales tanto en su valor como en su forma”*. Pero como principio fue invalidado por Hamilton (1843), puesto que sus cuaterniones no verificaban la propiedad conmutativa de la multiplicación

la utilizaron para la creación de diversas teorías, en donde los negativos al fin quedaron integrados y legitimados. El resto de problemas que se presentaban, quedarían reducidos solo a la fundamentación de los sistemas numéricos.

En resumen, los números negativos fueron aceptados y legitimados en el momento en que los matemáticos se despreocuparon por buscarles una fundamentación empírica o concreta, centrándose más en lo abstracto y lo formal, entendiendo que los números negativos (al igual que los complejos) eran una creación intelectual del ser humano, y por más que se quisiese explicar y relacionar algunas de sus propiedades (ley de los signos) con la vida real, no se encontraría ningún fenómeno en la naturaleza, que las explicase.

2.4.2 Modelos

La palabra modelo se emplea en el lenguaje natural con numerosos y diversos significados, por ejemplo, se puede decir que La Mona Lisa Gherardini del Giocondo “posó como modelo para Leonardo da Vinci”, o que determinado auto de juguete “es un modelo de un auto de Fórmula 1”. Partiendo de estos dos ejemplos Agustín Bravo (2009) hace una clasificación de los usos de la idea de sentido común de modelo de la siguiente forma:

1. En el primer empleo, el modelo refiere a un arquetipo, epítome o ejemplo paradigmático de algo, un caso, una concreción o una instancia representativa de una determinada situación general o abstracta, un canon a seguir, a imitar o a copiar.
2. En el segundo empleo, el modelo refiere a una versión simplificada, réplica, esquema, diseño, imitación o simulación de algo, que sólo captura de manera muy estilizada algunos elementos centrales y característicos elegidos según una determinada mirada intencionada, y pasa por alto los detalles; es por ello que permite un acercamiento más sencillo al entendimiento y la manipulación de lo que se está copiando.

En el lenguaje técnico o especializado, el término teórico modelo (él cual es utilizado tanto por los científicos naturales durante su labor, como por los epistemólogos que reflexionan desde un segundo orden de discurso sobre la naturaleza de tal labor) está tomado del lenguaje natural, pero se lo ha redefinido (afinándolo y precisándolo) de acuerdo al nuevo contexto *pragmático* (es decir, de uso) en el que ahora opera (Gutiérrez, 2005). En esta línea de modelo en la actualidad se puede citar lo siguiente:

“Los modelos son considerados herramientas de representación teórica del mundo, auxiliares para explicarlo, predecirlo y transformarlo”. Galagovsky y Adúriz (2001, pág. 233).

“Los modelos son instrumentos mediadores entre la realidad y la teoría porque son autónomos con relación a ambas”. Justi (2006, pág. 175).

En cuanto a modelos matemáticos, se parte de la idea de que la función de las matemáticas es la modelización del mundo sensible, con el fin de estudiar un sistema físico, social, químico, etc. Se construyen objetos matemáticos cuya manipulación permite obtener información sobre el sistema objeto de estudio.

En el proceso de modelización matemática, el objeto de estudio es un cierto sistema o fenómeno del mundo sensible, mientras que el sistema matemático, es el modelo que lo representa. Esto quiere decir que lo que realmente se estudia es el modelo matemático, deduciendo, a partir de él, el comportamiento del sistema inicial. El modelo es por consiguiente, un dispositivo mediador entre nuestra necesidad de conocer y nuestra capacidad para hacerlo. (Eva Cid, 2001).

Pero en la enseñanza de la aritmética elemental esta relación entre objeto de estudio y modelo se invierten. El objeto de estudio es ahora una noción aritmética: número natural, suma, resta, etc., y se busca un sistema físico o social con el que los alumnos estén familiarizados para a través de él mostrar y justificar el comportamiento de la nueva noción.

2.4.2.1 Modelos concretos en la enseñanza de los números enteros

Existen innumerables modelos concretos para ser usados en un contexto escolar en la enseñanza de los números enteros, según Eva Cid (2003) los más utilizados en los libros de texto son los siguientes: deudas y haberes, juegos con puntuaciones positivas y negativas, personas que suben o bajan en un medio de locomoción, temperaturas medidas por un termómetro, altitudes por encima o debajo del nivel del mar, personas que suben o bajan escaleras, años antes o después de Cristo, objetos que recorren un camino con dos sentidos, posiciones y desplazamientos en la recta numérica.

Janvier (1983) realizó una clasificación en donde distingue tres tipos de modelos: el de equilibrio, el de la recta numérica y el híbrido. Esta clasificación fue modificada posteriormente por Eva Cid (2002), la cual no tuvo en cuenta el modelo híbrido, porque considera que los ejemplos existentes pueden incluirse en uno de los otros dos modelos, además, nombra al modelo de equilibrio y al de la recta numérica definidos por Janvier, como modelo de neutralización y modelo de desplazamiento respectivamente.

2.4.2.1.1 Modelo de Neutralización

En el modelo de neutralización los signos predicativos se refieren a medidas de cantidades de magnitud de sentidos opuestos que se neutralizan entre sí; mientras que los signos operativos binarios se identifican con acciones de añadir, reunir, quitar, separar, etc. (Cid, 2003).

Un ejemplo es el modelo de las fichas de dos colores, en el cual la suma se la interpreta como la reunión de fichas, o bien como una acción de añadir fichas a un conjunto dado de ellas, seguido del proceso de neutralización para obtener la representación canónica del resultado. La resta se relaciona con la acción de quitar o separar fichas y el producto diciendo, por ejemplo, que $(-a)(-b)$ significa quitar, en ausencia de fichas, a veces b fichas de un cierto color (el asociado a los enteros negativos). En cuanto a la justificación del orden de los números enteros, exige la introducción de una valoración moral que establezca que el sentido positivo es mejor que el negativo, por ejemplo: es mejor tener fichas de un color que del otro, es mejor tener haberes que tener deudas, es mejor tener puntos positivos que negativos, etc.

2.4.2.1.2 Modelo de Desplazamiento

En el modelo de desplazamiento los signos predicativos indican posiciones en torno a un origen o desplazamientos en sentidos opuestos, los signos operativos binarios, indican composición de desplazamientos o desplazamiento desde una posición a otra, por ejemplo, si se utiliza un modelo de una persona que recorre un camino que se extiende a derecha e izquierda de una posición inicial, la suma de números enteros se justifica, bien como un desplazamiento aplicado a una posición para obtener otra posición, como una composición de desplazamientos que da como resultado otro desplazamiento o como una composición de desplazamientos que se aplica a la persona situada en la casilla cero y da como resultado la nueva posición de la persona. La resta significa la operación inversa de cualquiera de las anteriores y el producto una composición repetida de desplazamientos para obtener un desplazamiento resultante, al que se le cambia o no de sentido, según el entero que indica la repetición sea negativa o positiva. En cuanto al orden, se justifica interpretando los números enteros en términos de posiciones y diciendo que un número entero es menor que otro si, utilizando el sentido de recorrido definido como positivo, la posición que representa al primer número es anterior a la correspondiente al segundo número.

2.4.3 Fundamentos teóricos de las tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas

Los nuevos instrumentos informáticos han ido tomando un gran auge dentro de la vida social, es por eso que con el tiempo, se han intentado incorporar a estos en el nuevo currículo de matemáticas (a partir de 1998,

por el MEN, en su proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías, NTs). Este proyecto se ha ejecutado mediante la capacitación de docentes en el manejo de software de matemáticas, la incorporación de instrumentos informáticos como computadores, CBRs, calculadoras TI 92 Plus, etc. Además, se ha realizado con el apoyo entre colegios y universidades. El principal fin del proyecto, ha sido, la construcción y el reforzamiento de conocimientos matemáticos con el apoyo de las nuevas tecnologías, partiendo de un marco teórico, el cual está compuesto por aspectos como:

2.4.3.1 La Mediación

En el mundo real, conceptual, imaginario,..., el ser humano construye su mundo mediado por instrumentos, ya sean estos, conceptuales, físicos, informáticos, etc., además, estos instrumentos también son mediados por el mismo hombre, según lo afirma. J. P. Sartre (Crítica de la Razón Dialéctica), *“El descubrimiento capital de la experiencia dialéctica (...) es que el hombre es “mediado” por las cosas en la medida misma que las cosas son “mediadas” por el hombre”*. Veamos algunas mediaciones existentes:

2.4.3.1.1 Mediación Pedagógica:

“Se llama pedagógica a una mediación capaz de promover y acompañar el aprendizaje, es decir, la tarea de cada educando de construirse y apropiarse del mundo y de sí mismo” (Prieto, 1995) y de *“Reconocer seis instancias de mediación: La institución, el educador, el grupo, el contexto, los medios y materiales y uno mismo; cada una con sus diferenciaciones, producto de los condicionamientos culturales y sociales o bien de la inflexión que cada conjunto de seres le da a una instancia”*. Prieto (op. Cit.).

2.4.3.1.2 Mediación Tecnológica:

La construcción o evolución del conocimiento humano está mediado por herramientas, ya sean físicas o simbólicas. Si pasamos a las matemáticas, podemos decir que herramientas físicas pueden ser el ábaco, las calculadoras, el lápiz, una hoja, un TV, un libro, un computador; ahora, si pasamos a las herramientas simbólicas, podemos decir que entre las más importantes se encuentran la escritura y el lenguaje¹⁶, ya que estas permitieron la evolución del ser humano en todos sus aspectos: social, económico, religioso, etc. Dentro de las herramientas tecnológicas simbólicas podemos encontrar ejemplos como el número, los símbolos matemáticos, el álgebra, la aritmética, la geometría, las operaciones, etc., las cuales, permiten al ser humano resolver problemas, explicar situaciones, entender su mundo, construirse intelectualmente, etc. *“Todo acto cognitivo es mediado por alguna herramienta tecnológica, la cual puede ser material o simbólica”* (Wertsch, 1993). El uso de cualquiera de las herramientas descritas anteriormente, atraviesa por dos niveles: amplificación y reorganización.

¹⁶ También se las puede llamar Tecnologías Simbólicas Básicas

El uso de calculadoras graficadoras o el computador, permiten en cierta medida mejorar la enseñanza de contenidos matemáticos, un ejemplo muy sencillo, es cuando una gráfica se realiza a mano alzada sobre el tablero o una hoja, y cuando la gráfica es realizada en un instrumento informático, en este último la gráfica va a tener la posibilidad de ser más dinámica, más manipulable y no tan estática como en una hoja, además, cabe señalar que con la ayuda de estos instrumentos el ser humano ha podido visualizar cosas que con la ayuda de lápiz y papel hubiera sido muy complicado, los fractales es uno de ellos, entonces, es aquí donde se observa el aspecto de amplificación.

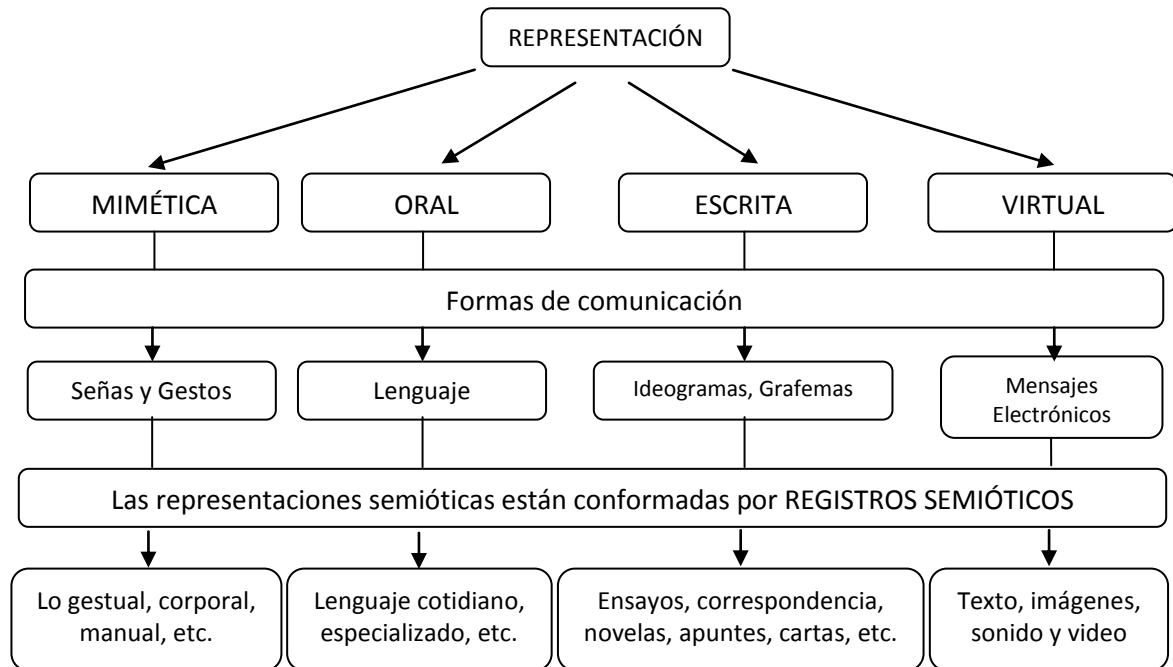
Por otro lado, se encuentra el aspecto de reorganización, el cual, se lo puede observar en la nueva forma de organizar currículos de matemáticas por algunos colegios o en la forma de abordar contenidos matemáticos, es decir, algunos elementos de cálculo diferencial, ahora pueden ser estudiados en grados 10 o 11 de forma un poco más clara y más sencilla, aunque éstos sean contenidos generalmente de universidad, y más aún, las NTs han permitido que los estudiantes tengan nuevas bases de algunos contenidos matemáticos, un ejemplo, es el estudio de la razón áurea y la relación con la serie de Fibonacci, la cual, en muchas ocasiones no era abordada dentro del estudio de contenidos matemáticos de educación secundaria.

2.4.3.2 Representaciones semióticas ejecutables

Semiosis: La aprehensión o producción de una representación semiótica, es de naturaleza externa al individuo, forman parte de ella las formas de comunicar a los demás lo que una persona conoce. Las formas básicas son: mimética, oral, escrita y virtual, en otras palabras, son las formas de comunicar lo que se sabe.

Noesis: Conformada por los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia, la comprensión de una inferencia, etc. Como se ve es de carácter interno.

Representaciones y Registros Semióticos: Las representaciones están conformadas por registros semióticos, a su vez, los registros semióticos son representaciones gráficas o simbólicas de un objeto.



Ejecutabilidad de las Representaciones Semióticas

Consiste en la posibilidad de pasar de una representación semiótica a otra, o de un registro a otro. Claramente se observa en la manipulación de información con software, ya que toda representación es ejecutable, por ejemplo: una carta escrita en Word (procesador de texto), es dinámica, variable debido a que al texto se le puede cambiar el tipo de letra, color, tamaño, ortografía, etc. Otro ejemplo es dibujar una circunferencia en Cabri II Plus, y realizarle distintos cambios (dilatlarla, reducirla, trasladarla, etc.) como se muestra en la siguiente figura. Cabe resaltar que todas las imágenes, gráficas y tablas utilizadas en esta investigación, son autoría de los investigadores, por lo tanto, se omitirá la fuente de dichos elementos

Figura 1: Representación semiótica

Un aspecto a tener muy en cuenta, es que estas representaciones no deben ser tratadas de forma aislada, sino que por el contrario deben integrarse entre ellas. Al proceso de representar un objeto matemático mediante todas las formas graficas es lo que se conoce como La Representación Semiótica Grafica del Objeto, y a cada variante de esta, se la conoce como “*Registro Semiótico Gráfico*”. Igualmente, en el trabajo con Cabri II Plus las figuras geométricas se pueden ampliar o arrastrar generando un mismo objeto o conservando sus propiedades básicas, un ejemplo es un triángulo equilátero trabajado en Cabri II Plus como se muestra en la siguiente figura.

Figura 2: Ejecutabilidad de las representaciones semióticas

Es decir, la figura cambia de posición o de tamaño pero no de forma; a este proceso de poder observar dichos desplazamientos o dilataciones, es lo que se conoce como Ejecutabilidad de la Representación Semiótica Gráfica. El paso de una representación semiótica a otra, de un registro semiótico a otro mediado por el software matemático constituye en esencia la ejecutabilidad de las representaciones semióticas. Actualmente, se recomienda en el campo pedagógico, la ley de oro de la didáctica, la cual, consiste en el uso de al menos tres representaciones semióticas de un objeto matemático para su comprensión y reconstrucción a nivel de las funciones superiores generales, que permiten el aprendizaje o apropiamiento de un concepto (R. Duval). El dragging o arrastre es la herramienta computacional que permite pasar de un registro semiótico a otro y es en últimas lo que permite realizar la demostración situada de una propiedad geométrica de los objetos de estudio.

La ejecutabilidad, si es utilizada por el docente o estudiantes, puede llegar a ser una herramienta muy poderosa para la corporización de distintas ideas matemáticas, ya que esta, da la posibilidad de que las personas involucradas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, puedan explorar, validar, ensayar hipótesis mediante el proceso de ensayo y error, lo cual puede resultar muy difícil de realizar con otros recursos.

En cuanto a los docentes y a las matemáticas, David Tall plantea una teoría novedosa, en la cual existen tres mundos de la matemática: mundo corporizado, simbólico y formal. A través de los sentidos, y más fuertemente a través de la vista, se puede acceder al mundo corporizado, aspecto que se fortalece con el uso de las nuevas tecnologías, en particular mediante el uso de software, como es el caso de Cabri II Plus.¹⁷

2.4.3.3 La cognición situada

Pensar en la elaboración de un currículo de matemáticas mediado por el uso de las NTs., implica la reflexión sobre la naturaleza de la construcción del conocimiento en el ser humano. Para esto se estudiarán dos enfoques: el Piagetiano y el de Vigotsky.

El conductismo se fundamenta en el aprendizaje mediante el proceso estímulo – respuesta, es decir, recurre a un proceso mecánico, el cual, acude al premio y al castigo. Dentro de éste se encuentran tres variantes, en las que el conductismo toma su forma clásica, instrumental y neoconductista¹⁸. Por otro lado se encuentra el enfoque piagetiano, el cual centra al niño como interés en lo cognitivo. La teoría piagetiana tiene sus raíces en lo que afirmaba Kant: *“El individuo somete a un proceso de organización las impresiones sensibles, lo que se convierte en conocimiento”*, lo que conlleva a decir que el sujeto construye conocimiento mediante las experiencias sensoriales o que este construye su mundo en forma activa¹⁹. La Psicología Piagetiana (Psicogenética), la cual contiene tres componentes: estructuralista, constructivista e interaccionista, permitió a éste, comprobar experimentalmente sus teorías epistemológicas. Dentro del estructuralismo se supone que el conocimiento en el niño va de un estado menor a uno mayor, por su parte, en el aprendizaje constructivista, si se actúa sobre el medio, el sujeto reconstruirá su mundo, objetivizándolo y representándolo. En cuanto al interaccionismo, este aparece cuando el sujeto entra en relación con su mundo, apropiándose de la información y adaptándola a sus estructuras cognitivas. La teoría de Piaget minimiza el papel del contexto en la construcción del conocimiento y supone que el conocimiento viaja a través de tres etapas: desarrollo, aprendizaje y enseñanza.

Por otro lado, el enfoque de Vigotsky plantea el desarrollo cognitivo desde una perspectiva histórica – social, en el cual, el ser humano empieza primero internalizando lo que su mundo le ofrece. Asimismo, destaca dos aspectos importantes en dicho desarrollo: Los sistemas semióticos de representación y la interacción social. En el primer caso, el ser humano puede efectuar una

¹⁷ Para mayor información visitar la página: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/>

¹⁸ La forma neoconductista reconoce la incidencia del contexto en el aprendizaje

¹⁹ La capacidad de organizar las experiencias sensoriales permitió a Piaget la formulación de la Epistemología Constructivista Piagetiana,

representación interna del mundo que le rodea y puede comunicarlo al resto de las personas. El segundo caso es observable en las relaciones niño – padres, persona – comunidad e individuo – sociedad. Ahora, en cuanto al desarrollo del conocimiento, este comienza en un plano inter-sicológico para después pasar a un plano intra-sicológico. El lenguaje juega un papel muy importante en la interiorización del mundo, ya que éste, une lo externo con lo interno. Por tanto, es importante que las NTs contengan aspectos como los descritos anteriormente, para ayudar en el desarrollo de los conocimientos matemáticos.

Por otro lado Vigotsky afirma que los procesos de aprendizaje conllevan al desarrollo cognitivo, asimismo, éste recurre a la idea de la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), para referirse a lo que una persona puede realizar con ayuda de otra (profesor, adulto). Así, el papel del experto es hacer que el estudiante pase de un papel tutelar a uno autónomo, enseñando según las capacidades cognitivas que posean los estudiantes.

Un aspecto muy importante es el “*Conflicto cognitivo*”, el cual se presenta cuando un estudiante es enfrentado a diferentes soluciones (dadas por otros) de un mismo problema. Dicho tema, favorece el desarrollo cognitivo de los estudiantes, además, permite el avance substancial de ellos (en comparación con que si trabajaran solos). Dentro del trabajo en equipo –el cual da origen a interacciones socio cognitivas simétricas, en el sentido en que todos desempeñan papeles semejantes–, el aprendizaje se realiza por cooperación de todos sus integrantes, cabe señalar, que el trabajo en grupo por sí solo no es garantía de un buen aprendizaje, entonces, es aquí donde las NTs juegan un rol muy importante, ya que permiten el planteamiento de situaciones problemas en equipo, con el fin de alcanzar los logros educativos que se deseen. Dentro del sistema educativo se presentan también las interacciones socio cognitivas asimétricas en las relaciones entre el estudiante y el profesor (novicio – experto), en éstas, cada uno realiza su papel pero orientado hacia el desarrollo cognitivo del estudiante. En este proceso se presentan dos efectos: el efecto novicio y el efecto tutor (los dos aprenden).

2.4.3.4 Solución de problemas

Las situaciones problemáticas se ubican dentro del contexto; son definidas como un ambiente, en el cual, se construye conocimiento mediante la resolución de problemas, por otro lado, estas se derivan de la idea que tenga cada persona acerca de la naturaleza de las matemáticas, sobresaliendo dos concepciones: en primer lugar, “*saber matemática es equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina, formar en matemáticas será por tanto hacer énfasis en la manipulación de símbolos, raramente comprendidos*”; para el segundo caso, “*las matemáticas son una construcción social que incluye conjeturas, pruebas y refutaciones, cuyos resultados*

deben ser juzgados en relación al ambiente social y cultural. En este caso, saber *matemáticas es hacer matemáticas*”²⁰.

La solución de problemas tiene varios significados: resolver problemas como contexto, en los cuales la estrategia es la de alcanzar los fines educativos de una propuesta curricular. Otro significado, es que se pueden entender como una habilidad, siendo, el estudio de contenidos específicos, su principal estrategia. Un tercer significado, es vinculado al “*hacer matemáticas*”, en el cual, el estudiante tiene la posibilidad de imaginarse las cosas antes de utilizarlas, es decir, él puede imaginarse la solución a un problema de acuerdo a su capacidad para después ponerla en práctica. Según Schoenfeld (1992), unos factores que intervienen en la resolución de problemas son: el conocimiento de base, las estrategias en la resolución de problemas, los aspectos metacognitivos, los aspectos afectivos, el sistema de creencias y la comunidad de práctica.

La implementación de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas, requiere que el docente tenga conocimientos sobre cuáles son los contenidos que manejan sus estudiantes (ya sean intuitivos o formales), para a partir de esto, poder plantear los problemas de acuerdo al nivel cognitivo de los estudiantes. En cuanto a las estrategias para la solución de problemas, Polya plantea las siguientes: la comprensión del problema, el diseño de un plan de acción, la aplicación de este plan y examinar la solución. En los aspectos meta cognitivos entran aspectos como: el monitoreo, el control, la autorregulación. Además, Polya afirma que la utilización de las estrategias de resolución de problemas, crea inconvenientes para los profesores a nivel pedagógico (a los docentes les resulta difícil ver hasta qué punto ellos pueden ayudarles a los estudiantes en su camino hacia una solución de un problema), a nivel matemático (el docente debe tener una buena fundamentación teórica sobre el tema a trabajar, con el fin de evitar inconvenientes o desvíos en el estudio del tema o contenidos matemáticos) y a nivel personal (muchos docentes no se encuentran cómodos con los contenidos trabajados, muy probablemente, porque no son de su total manejo). Cabe señalar, que las ideas que se tengan en cuanto a la naturaleza de las matemáticas, tanto por estudiantes, profesores, padres de familia, etc., afectaran en su proceso de enseñanza y aprendizaje.

2.4.3.5 Fluidez Algorítmica

Consiste en las estrategias locales de resolución de problemas por parte de los estudiantes, ayudados por las herramientas simbólicas o físicas. El uso de las NTs influye en como el estudiante realiza el manejo de un algoritmo para la resolución de problemas, es decir, las NTs permiten que el

²⁰ Tomado del artículo La Calculadora en el Aula (Soto, O y Narváez, O; 2004, Pág. 22)

estudiante no se centre solo en el desarrollo de algoritmos, sino que por el contrario, preste más atención a la aplicabilidad de éste y a la solución de los problemas; igualmente, le permite identificar el manejo de varios algoritmos y cual se adaptó mejor al problema. Por otro lado, la experimentación y luego la sistematización, permiten una buena fluidez algorítmica.

2.4.3.6 Fluidez Conceptual

Consiste en el desarrollo conceptual con la ayuda de las Nuevas Tecnologías, las cuales, gracias a su capacidad de representación variada, permiten que el estudiante tenga diferentes formas de ver los conceptos matemáticos, realizando en muchas ocasiones, un estudio más detallado de los mismos. Ahora, la posibilidad de matematizar los fenómenos naturales y sociales con ayuda de las NTs, es otro rasgo importante de la fluidez conceptual; además, las NTs permiten que los conceptos matemáticos tomen un nivel cada vez más superior e igualmente, que tengan una relación más estrecha con otros contenidos matemáticos (relación de las funciones con los fractales). Las formas de comunicación oral y escrita sirven como instrumentos para la ratificación de la fluidez conceptual, es decir, una persona que tiene una gran fluidez conceptual, tendrá un excelente manejo del lenguaje (un lenguaje muy sofisticado).

2.4.4 Currículo

2.4.4.1 Concepciones

El currículo es interpretado de diversas formas, algunos lo asemejan con los PLANES DE CLASE y PROGRAMAS DE ESTUDIO, la cual es la concepción más arraigada en nuestro medio, otros lo interpretan como un PRODUCTO de la educación o como los PROCESOS que permiten llevar a cabo los objetivos educativos institucionales, además se encuentran los que lo identifican con la misma EDUCACIÓN y finalmente también es pensado como una DISCIPLINA, que permite organizar a través de estrategias el aprendizaje.

Las diversas definiciones de currículo se diferencian tanto en lo que hace referencia a su concepción, como a su campo de acción; a continuación se muestran dos de ellas:

2.4.4.2 Concepto de currículo

Según el artículo 76 de la ley 115 de 1994, “*Currículo* es el conjunto de criterios, planes de estudio, programas, metodologías, y procesos que contribuyen a la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local, incluyendo también los recursos humanos, académicos y físicos para poner en práctica las políticas y llevar a cabo el proyecto educativo *institucional*”.

Según el Ministerio de Educación y Cultura de Bolivia, currículo es el “*Conjunto integrado de actividades, experiencias y medios del proceso enseñanza-*

aprendizaje, en el que participan alumnos, maestros y comunidad, para alcanzar los objetivos de la educación”.

Las dos definiciones anteriores reflejan la interpretación universal de currículo, atribuyendo consigo un conjunto de elementos propicios en los procesos de aprendizaje y enseñanza de una institución educativa.

De igual manera se podría revisar otras definiciones de currículo, adoptadas en algunos países iberoamericanos, pero todas ellas se enfatizan en el papel del currículo: ser un medio que permite alcanzar los objetivos de una institución educativa.

De lo anterior, se observa que no hay un concepto terminado y único de lo que es currículo, lo cual tiene sentido, por cuanto siendo cada institución educativa autónoma, es en cada una de ellas, donde se debe construir el concepto, basándose en un DIAGNÓSTICO institucional, como también, dando respuesta al entorno en que se encuentre inscrita la institución educativa.

2.4.4.3 Características del currículo

- *Pertinencia.* Debe responder a las expectativas y necesidades del medio.
- *Participación.* Su construcción se realiza con toda la comunidad educativa, debe ser un proceso de concertación para que tenga éxito.
- *Flexibilidad.* En lo referente a contenidos, metodologías, enfoques, etc.
- *Enfoque social.* Debe tener como una de sus prioridades resolver problemas de la comunidad.
- *Enfoque investigativo.* Adoptar enfoques curriculares, metodologías, teorías pedagógicas, estructurar el P.E.I, implica que el docente sea un investigador para apropiarse de los elementos teóricos que necesita, como también para adelantar el estudio sistemático de los resultados que se obtengan de la aplicación de los aspectos mencionados anteriormente.
- *Practicidad.* El currículo debe procurar el equilibrio entre la teoría y la práctica en el estudio de las diferentes áreas que constituyen el plan de estudios.
- *Interdisciplinariedad.* La adecuada construcción del currículo se logra mediante la participación de los docentes de las diferentes áreas del conocimiento, evitando así, el parcelar al conocimiento
- *Enfoque interinstitucional.* Favorece el intercambio de experiencias y recursos entre instituciones, logrando aprovechar en forma más eficiente los escasos recursos que generalmente poseen las instituciones educativas.

- *Totalidad o integralidad.* Característica que hace de los estudiantes capaces de sintetizar y globalizar los conocimientos construidos en su práctica cotidiana.

2.4.4.4 Elementos del currículo

Los elementos que constituyen el currículo son los siguientes: propósitos, contenidos, secuenciación, método, recursos y evaluación, siendo cada uno de ellos las respuestas a los siguientes interrogantes: ¿para que enseñar?, ¿qué enseñar?, ¿cuándo enseñar?, ¿cómo enseñar?, ¿con qué enseñar? y ¿se cumplió?

2.4.4.4.1 Propósitos

Conocidos también como los FUNDAMENTOS DEL CURRÍCULO.

Para estructurar los propósitos del currículo se debe dar respuesta a los siguientes interrogantes:

- ¿POR QUÉ?

Cuya respuesta se la encuentra en:

La Filosofía. Que aporta con la concepción de Hombre y Sociedad que desea la comunidad educativa local.

La Historia. Que nos da cuenta del desarrollo histórico social de la humanidad y la comunidad, como también de la génesis y desarrollo del conocimiento.

- ¿PARA QUÉ?

La respuesta la obtenemos desde:

La Sociología. Que permite visualizar el proyecto de la sociedad que se desea construir, en procura de mejorar la calidad de vida, desde el punto de vista del desarrollo a escala humana.

La Economía. Que nos permite identificar las expectativas sociales referentes al desarrollo económico y las políticas nacionales e internacionales.

- ¿COMÓ?

La respuesta se basa en:

La Psicología. Mediante el estudio sistémico de la teoría del Desarrollo Psicogenético (J. Piaget) y la teoría sociocultural de Vigotsky.

La Antropología. Que permite identificar los elementos constitutivos de la identidad cultural nacional, regional y local.

- ¿CUÁNDO?

La respuesta se la encuentra en:

La Biología. Aporta los elementos a tener en cuenta en lo referente a los modelos ambientales más adecuados para lograr un desarrollo sostenible a escala humana.

Desarrollo Científico y Tecnológico. Permite incorporar los avances científicos y tecnológicos a la estructura curricular, está basado en el conocimiento que poseen los programadores. Cuando se carece de este elemento se convierte en una seria limitante para la adecuada construcción del currículo.

2.4.4.4.2 Contenidos curriculares

Una vez que se hayan definido los propósitos curriculares, quedan determinados los contenidos, los propósitos jerarquizan los contenidos curriculares.

Serán diferentes los contenidos de los propósitos si lo que se desea es formar estudiantes como personas integrales, o si se desea darle mayor importancia a la formación académica de estos.

Los contenidos por su carácter pueden ser:

- Concretos y específicos: Basados en la presentación de información y datos aislados de técnicas y normas.
- Generales y Abstractos: Basados en la construcción de conceptos e instrumentos del conocimiento, la generación de habilidades y destrezas, estructurados para lograr la formación de valores en los estudiantes.

2.4.4.4.3 Secuenciación

Es la manera como se abordan los contenidos de cada temática por parte del profesor.

Existen varias formas de secuenciar los contenidos; entre ellas se tiene:

- Cronológica. Consiste en abordar los contenidos del origen hasta la fecha.
- Arqueológica. Abordar el estudio de una temática partiendo del momento actual.
- Fenomenológica. A partir del fenómeno y la forma.
- Empirista. De lo concreto y próximo.

- Genética. Basado en el desarrollo evolutivo del niño.
- Lógica. Tomando como referente la estructura de cada ciencia.
- Instruccional. Orden en la presentación de los conocimientos.

2.4.4.4.4 La metodología

Es la relación que se establece y el papel asignado a los ESTUDIANTES, MAESTRO Y SABER, en el proceso educativo formal. Los propósitos, los contenidos y la secuencia de una metodología específica.

La metodología adoptada implica el papel que desempeña el estudiante:

- Si se hace de él un receptor pasivo, entonces el maestro y el saber son el centro del proceso educativo.
- Si el estudiante es quien construye el conocimiento, entonces el maestro y el saber están al servicio del estudiante.
- Si se considera que el conocimiento se construye en la sociedad, entonces interesa la relación alumno-maestro.

De lo cual surgen las siguientes preguntas.

- ✓ ¿Son necesarias diferentes metodologías para contenidos cognitivos, valorativos y sicomotrices?
- ✓ ¿Dependiendo del ciclo de desarrollo del niño deben ser diferentes las metodologías al inicio y al final del ciclo?

2.4.4.4.5 Recursos didácticos

De la postura pedagógica que se adopte, dependen los recursos didácticos que se utilizan para favorecer la construcción del conocimiento en los estudiantes. Es así como María Montessori y Ovide Decroly, al implementar los postulados de la escuela nueva, tuvieron que revolucionar los recursos didácticos, estos adoptaron juegos y materiales didácticos y naturales.

En la escuela tradicional, uno de los recursos más utilizados ha sido el cuaderno, se lo ha empleado como medio para memorizar contenidos y como fin para evaluar su presentación. La escuela activa, afirma que los recursos son la enseñanza misma, manipular es aprender.

2.4.4.4.6 Evaluación

Evaluar es emitir juicios de valor sobre un fenómeno, la evaluación tiene sentido si es a partir de unos propósitos. La experiencia no es suficiente para evaluar bien, es necesario evaluar la evaluación.

La evaluación tiene sentido cuando se la realiza con unas finalidades, las cuales pueden ser de carácter diagnóstico, formativo o sumatorio.

Tomando como referentes la Ley General de la Educación, el decreto 1860 del 3 de agosto de 1994 y la resolución 2343 de junio 5 de 1996, en lo que concierne a la evaluación, se debe tener en cuenta los siguientes aspectos:

- ✓ ¿Qué son Logros?
- ✓ ¿Qué son Indicadores de Logro?
- ✓ ¿Cómo evaluar Cualitativamente?

La definición de logro se hace a nivel institucional, y estos deben responder a la visión (el deber ser) de cada institución, la cual, orienta la selección de los enfoques curriculares que se adoptarán.

Los indicadores de logros son de carácter nacional y han sido promulgados por el MEN en la resolución 2343, para los niveles de preescolar, básica primaria, secundaria y para el nivel medio. Los indicadores de logro han sido estructurados para detectar si el estudiante ha desarrollado alguno o varios de los siguientes procesos curriculares:

- Procesos biofísicos.
- Procesos de pensamiento cognitivo y meta cognitivo.
- Procesos de competencia comunicativa.
- Procesos valorativos y actitudinales.
- Procesos de expresión y experiencia estética.
- Procesos referidos a la trascendencia y la religiosidad.

En lo que hace referencia a la evaluación de carácter cualitativo, conviene hacer una reflexión en los siguientes aspectos:

- Su implementación en las instituciones educativas debe generar inevitablemente situaciones caóticas, por cuanto estudiantes, profesores y padres de familia vienen de una larga tradición evaluativa de tipo cuantitativo.
- La evaluación cualitativa no consiste únicamente en cambiar de una escala numérica a una literal, consiste básicamente en detectar a través de los indicadores de logros si un estudiante se ha apropiado de ciertos procesos curriculares previamente definidos.
- Los indicadores de logros han sido definidos partiendo de una concepción educativa por procesos.

2.4.5 Lineamientos curriculares para el área de matemáticas

Los lineamientos curriculares surgen de la necesidad de dar respuestas a preguntas tales como: ¿Qué aprender en la escuela? y ¿Qué enseñar en la escuela?; es decir, los lineamientos curriculares, permiten a la comunidad educativa, elaborar una educación estandarizada, en la cual, los conocimientos enseñados o aprendidos son los mismos a nivel regional, departamental y nacional; aunque la profundización que ellos (los conocimientos) reciban sea autonomía de cada institución educativa.

Dentro de los lineamientos curriculares se encuentran inmersos cinco pensamientos matemáticos, los cuales, son utilizados dentro de un salón de clases. Para el caso de esta investigación, se hablará de los que serán utilizados en gran parte en el desarrollo de dicho trabajo, claro está, sin negar, que los otros pensamientos también se encuentren inmersos²¹. Dichos pensamientos son:

2.4.5.1 Pensamiento Numérico:

Se origina con el estudio de los sistemas numéricos; dentro de éste, se desarrolla lo que son las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, las ordenes en magnitudes, etc.

El pensamiento numérico es de carácter evolutivo, en cuanto los estudiantes tienen la oportunidad de pensar en los números y de utilizarlos en diferentes contextos. También entra en juego lo referente a la comprensión del significado de los números, sus interpretaciones, representaciones, el reconocimiento del valor absoluto y relativo de los mismos, etc.

Un aspecto a tener muy en cuenta, dentro de este pensamiento, es que el estudiante se acerca a éste, mediado por el contexto en el que se desarrollan las matemáticas. Existen tres aspectos muy importantes a tener en cuenta en el desarrollo del pensamiento numérico:

- Comprensión de los números y de la numeración
- Comprensión del concepto de las operaciones
- Cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones.

Es decir, en este pensamiento se encuentra inmerso todo lo relacionado con los números: operaciones, conteo, orden, contextualización de los números, aplicación de los mismos, etc.

²¹ Para mayor información consultar Serie Lineamientos Curriculares

2.4.5.2 Pensamiento Espacial:

Este pensamiento se encarga de todo lo concerniente a la geometría y el espacio. Según Van Hiele (MEN, 1998), el desarrollo del pensamiento geométrico se desarrolla en 5 niveles:

Nivel 1: Familiarización del estudiante con todas las figuras geométricas existentes en la vida real, con la particularidad que el estudiante no detecta relaciones entre las formas de las figuras o entre sus partes.

Nivel 2: Análisis y conocimiento de propiedades de figuras geométricas. Dicho acto es realizado mediante las observaciones realizadas en la ejecución de trabajos prácticos, tales como: dibujo, construcción de modelos, medición, etc.

Nivel 3: Caracterizado por el ordenamiento y la clasificación, que realiza el estudiante, de las figuras geométricas. Las definiciones y relaciones empiezan a aclararse mucho más. Cabe resaltar que en este nivel los estudiantes razonan sobre las propiedades de clases de figuras.

Nivel 4: Es de razonamiento deductivo, es decir, se entienden los axiomas, las definiciones, los teoremas, aunque no se hagan todavía razonamientos abstractos (Demostraciones).

Nivel 5: Es cuando el razonamiento toma un camino puramente deductivo, es decir, se realiza manipulación de enunciados geométricos como axiomas, definiciones, postulados, etc., o sea, ciertas nociones de demostración.

2.4.5.3 Pensamiento Métrico:

Todo lo concerniente a la actividad de medir y los sistemas de medidas. Es en este pensamiento, donde los niños encuentran otra más de las utilidades de las matemáticas. Los sistemas métricos son los que cuantifican numéricamente las dimensiones o magnitudes. Los logros propuestos para los sistemas métricos se encaminan hacia el desarrollo en los conceptos y procesos tales como:

- La construcción de los conceptos de cada magnitud
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes
- La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo con lo discreto”
- La apreciación del rango de las magnitudes
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos
- La diferencia entre la unidad y el patrón de medición
- La asignación numérica
- El papel del trasfondo social de la medición

2.4.6 Estándares curriculares

2.4.6.1 Definición: De acuerdo con lo propuesto por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), en cumplimiento al artículo 78 de la ley 115 de 1994.

“Los estándares curriculares son criterios que especifican lo que todos los estudiantes de educación preescolar, básica y media deben saber y ser capaces de hacer en una determinada área y grado. Se traducen en formulaciones claras, universales, precisas y breves, que expresan lo que debe hacerse y cuán bien debe hacerse. Están sujetos a la verificación; por lo tanto, también son referentes para la construcción de sistemas y procesos de evaluación interna y externa, consistentes con las acciones educativas”.

2.4.6.2 Estándares curriculares de competencias en Matemáticas

Los estándares de competencias en matemáticas presentan algunos de los niveles en el desarrollo de las competencias asociadas con los cinco tipos de pensamiento matemático: el numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional. Por lo cual, se escriben en cinco columnas que corresponden a cada uno de dichos tipos de pensamiento y a los sistemas conceptuales y simbólicos asociados a él.

Igualmente, cada estándar de cada columna pone el énfasis en uno o dos de los cinco procesos generales de la actividad matemática que cruzan dichos tipos de pensamiento (formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos), pero suele referirse también a otros procesos generales que pueden practicarse en distintos contextos, con el fin de contribuir a superar el nivel seleccionado como estándar (MEN, 2006).

Los estándares están organizados en cinco conjuntos de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo). Pero no es camisa de fuerza cumplir con todos los estándares en cada organización, debido a que tienen conexión con los estándares de los grados anteriores y de los siguientes.

2.4.6.3 Coherencia vertical y horizontal

La coherencia vertical está dada por la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados. La coherencia horizontal está dada por la relación que tiene un estándar determinado con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados.

2.4.6.4 Estándares curriculares de grado séptimo (pensamiento numérico y sistemas numéricos) (MEN, 2006)

- Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.
- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
- Justifico la extensión de la representación polinomial decimal usual de los números naturales a la representación decimal usual de los números racionales, utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal.
- Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos.
- Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.
- Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.
- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.
- Resuelvo y formulo problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación.
- Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
- Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas.
- Establezco conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores.
- Justifico la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas.
- Reconozco argumentos combinatorios como herramienta para interpretación de situaciones diversas de conteo.

2.4.7 Competencias básicas en matemáticas

2.4.7.1 Concepto

El concepto de competencia hace referencia a lo que el individuo es capaz de hacer (González, 2008). Además el concepto de competencia está íntimamente relacionado con el punto de vista funcional de las matemáticas:

- Las matemáticas como “modo de hacer”
- La utilización de herramientas matemáticas
- El conocimiento matemático en funcionamiento

Y en el que intervienen los siguientes elementos:

- Tareas contextualizadas
- Herramientas conceptuales y procedimentales
- Sujeto cognitivo

2.4.7.2 Utilidad del concepto de competencia matemática

Las competencias matemáticas sirven para:

1. Propósitos formativos. Para orientar los procesos de formación hacia el desarrollo de determinadas capacidades.
2. Propósitos normativos. Para especificar aspectos curriculares, fines, métodos, etc.
3. Propósitos descriptivos. Para describir y caracterizar las prácticas de enseñanza de las matemáticas en el aula, las respuestas de los estudiantes, los fines que se persiguen con determinadas tareas, etc.
4. Propósitos comparativos. Se pueden comparar diferentes currículos, diferentes clases de educación matemática, en diferentes niveles o en diferentes lugares, etc.
5. Propósitos evaluadores. Como soportes meta cognitivos para evaluación de procesos tanto de profesores como de alumnos.

2.4.7.3 Competencias matemáticas

Para Niss (1999), poseer competencia matemática significa:

“poseer habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos intra y extra matemáticos y situaciones en las que las matemáticas juegan o pueden tener un protagonismo”

Además para este autor, la persona que domina las matemáticas es porque posee competencias matemáticas; de tal forma que la persona que no posea una mínima competencia matemática no podrá interactuar con los problemas del medio en donde se desenvuelva; en otras palabras, no será matemáticamente competente. De esta forma, cobra valor el tener competencias matemáticas, dado que son vitales y necesarias para el uso común de toda persona.

2.4.7.3.1 Tipos de competencias matemáticas

Niss (1999) distingue dos grupos de competencias:

Primer Grupo: Estas competencias tienen que ver con la habilidad para preguntar y responder cuestiones en matemáticas y por medio de las matemáticas.

- Pensar matemáticamente
- Proponer y resolver problemas de matemáticas
- Modelizar matemáticamente

Segundo Grupo: Estas competencias tienen que ver con la habilidad para utilizar el lenguaje y las herramientas matemáticas.

- Representar objetos y situaciones matemáticas
- Utilizar símbolos y formalismos matemáticos
- Comunicar en, con y sobre las matemáticas
- Utilizar recursos auxiliares y herramientas

2.4.7.4 Competencias matemáticas en PISA 2003

El Proyecto PISA utiliza las siguientes competencias matemáticas para propósitos evaluadores y comparativos fundamentalmente:

- Pensar y razonar (distinguir entre diferentes tipos de enunciados, plantear cuestiones propias de las matemáticas, etc.).
- Argumentar (conocer lo que son pruebas matemáticas, tener sentido para la heurística, crear y expresar argumentos matemáticos, etc.).
- Comunicar (expresión matemática, oral y escrita, entender expresiones, etc.).
- Modelizar (estructurar el campo, interpretar los modelos, trabajar con modelos, etc.)
- Plantear y resolver problemas.
- Representar (codificar, decodificar e interpretar representaciones, traducir entre diferentes representaciones, etc.).
- Utilizar varios lenguajes

3. METODOLOGÍA

A continuación se hace la descripción del enfoque que seguirá la investigación, los instrumentos utilizados para la recolección de datos, la población que será objeto de estudio, las herramientas y técnicas empleadas y las distintas fases de la investigación.

3.1 ENFOQUE

La investigación será desarrollada con un enfoque *cualitativo etnográfico en educación*, puesto que, se pretende realizar una inmersión en la vida cotidiana de la comunidad estudiada, observar intensivamente las modalidades de interacción entre el estudiante y el computador; el aprendizaje del idioma nativo (lenguaje computacional) y su interpretación como sistema de símbolos; además, con la ayuda del desarrollo de actividades diseñadas en Cabri II Plus, se pretende realizar una descripción de las formas como los miembros de la comunidad estudiada conceptualizan el tema a investigar (números enteros),.

3.2 POBLACIÓN

La población elegida para el presente estudio, está conformada por 33 estudiantes²² de Séptimo Grado de la Institución Educativa Municipal de Cabrera, ubicada en la parte oriental de la ciudad de San Juan de Pasto durante el año lectivo 2013. Además, se trabajará en el aula de informática número 1, la cual cuenta con 14 equipos de cómputo.

²² Cuyas edades oscilan entre 12 y 13 años de edad

3.3 CATEGORÍAS

CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS	INDICADORES
Conceptualización de los números enteros	Mediación Tecnológica	Uso de Geometría Dinámica
	Fluidez Algorítmica y Fluidez Conceptual	Construcción de objetos en Cabri y construcción de conceptos matemáticos
	Representaciones Semióticas Ejecutables	Gráfica, Simbólica, Verbal, Escrita, Mimética
	Cognición Situada	Trabajo en grupo e individual
	Solución de problemas	Comprensión del problema, diseño y aplicación de un plan de acción, examinación de la solución
	Valor Absoluto	Distancias
Relaciones entre números enteros	Relación de Orden	Posiciones en la Recta Numérica Cabri
Operaciones entre números enteros	Internas	Adición y Sustracción en la Recta Numérica Cabri

3.4 INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Los instrumentos utilizados para la recolección de datos en la investigación serán los siguientes:

- Talleres de actividades sobre la conceptualización del número entero y sus operaciones básicas.
- Diario de campo, para el registro de los comportamientos observados y las situaciones.
- Videos y fotos en cada una de las actividades.

3.5 ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Para analizar las actividades desarrolladas por los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Municipal de Cabrera se van a utilizar los siguientes instrumentos de análisis:

3.5.1 Relato/ Anécdota

Consiste en la descripción detallada del desarrollo de la experiencia, haciendo énfasis en la forma cómo actúan los individuos observados, a la luz de los elementos teóricos que fundamentan la investigación. En el relato se

procura identificar los aspectos más notables, los eventuales y algunos anecdóticos.

3.5.2 Estadística Descriptiva

Según varios autores la estadística descriptiva puede ser definida de diferentes formas, de las cuales tenemos las siguientes:

Se dedica a los métodos de recolección, descripción, visualización y resumen de datos originados a partir de los fenómenos en estudio. Los datos pueden ser resumidos numérica o gráficamente. ([http://www.Wikipedia: Estadísticas](http://www.Wikipedia:Estadísticas)).

Es una ciencia que analiza series de datos (edad de una población, altura de los estudiantes de una escuela, temperatura en los meses de verano, etc.) y trata de extraer conclusiones sobre el comportamiento de estas variables. (<http://www.AulaFacil.com>). Por consiguiente, la estadística descriptiva es la técnica que se va a encargar de la recopilación, presentación, tratamiento y análisis de los datos, con el único objeto de resumir y describir las características de un conjunto de datos, las cuales son calculadas a través de medidas descriptivas como: la medida de tendencia central (aritmética, mediana, moda, media geométrica), de posición (cuartiles, deciles, percentiles). Además, son representados de forma más específica por medio de tablas y gráficas estadísticas.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presenta el análisis de la información recolectada a lo largo del proceso de la investigación. Se expone, de forma detallada, cada una de las actividades que hicieron parte de la unidad didáctica de los números enteros que se implementó en la Institución Educativa Municipal de Cabrera.

En la etapa de implementación se realizó un análisis de tipo cualitativo del desempeño que tuvieron los estudiantes en cada una de las sesiones de trabajo, con el objetivo de explorar el papel de la mediación computacional en el aprendizaje y enseñanza del concepto y las operaciones de adición y sustracción con los números enteros.

Se utilizó el modelo de desplazamiento como medio, por el cual, se les permitió a los estudiantes justificar bien la estructura del concepto y operaciones de adición y sustracción con los números enteros.

A continuación se presenta el análisis de cada una de las actividades desarrolladas por los estudiantes de grado séptimo de la IEM Cabrera.

4.1 ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

Las actividades de aprendizaje fueron desarrolladas en la IEM Cabrera del Corregimiento de Cabrera, entre el día 25 de febrero del 2013 y el día 11 de abril del mismo año; se implementaron con el propósito de estudiar el concepto y las operaciones básicas con los números enteros, especialmente la adición y sustracción.

Dichas actividades se realizaron utilizando el software de geometría dinámica Cabri II Plus y un modelo concreto en la recta numérica (Modelo de Desplazamiento), el cual fue uno de los primeros modelos utilizados por matemáticos de la antigüedad, para poder dar una interpretación “concreta” a los números enteros, y más explícitamente a los números negativos.

Esta investigación tuvo que adecuarse a los recursos que ofrecía la institución educativa, por lo cual, se trabajó con 14 grupos así: nueve grupos conformados por dos estudiantes y cinco grupos de tres estudiantes.

Antes de la aplicación de las actividades correspondientes a la unidad didáctica de los números enteros, se enseñó a los estudiantes a utilizar el

software de geometría dinámica Cabri II Plus mediante actividades introductorias, en el anexo 1 se puede apreciar dichas actividades.

Se desarrollaron un total de 23 actividades en 32 sesiones cada una de 50 minutos²³, las cuales se plantearon y distribuyeron de la siguiente manera:

Tabla 1. Actividades de aprendizaje 2013. Fuente: Presente investigación

Actividades	Número de actividades	Número de sesiones	Tiempo
Inducción a Cabri II Plus	4	2	100 Minutos
Concepto de Número Entero	5	10	500 Minutos
Orden en los Enteros	3	4	200 Minutos
Valor absoluto	3	2	100 Minutos
Adición y Sustracción	8	14	700 Minutos
TOTAL	23	32	1600 Minutos

Cabe resaltar que todas las imágenes, gráficas y tablas utilizadas en esta investigación, son autoría de los investigadores, por lo tanto, se omitirá la fuente de dichos elementos. Antes de pasar al análisis de las actividades se darán algunas definiciones sobre los temas tratados en esta investigación, dichas definiciones son: definición de número entero, definición de valor absoluto, definición de orden en los números enteros, definición de adición y sustracción de números enteros.

Definición de número entero: Longitud o módulo del vector asociado a la recta numérica, cuyo sentido define la orientación positiva o negativa del mismo en relación a un punto de referencia, (en la recta numérica el punto de referencia es el origen), si el vector es paralelo a la recta numérica y su sentido es hacia la derecha (hacia arriba) se dice que el vector representa a un número entero positivo y si su sentido es hacia la izquierda (hacia abajo), se dice que el vector representa a un número entero negativo.

Definición de valor absoluto: Longitud o módulo del vector en relación a un número entero sin tener en cuenta su signo, es decir si el número entero es positivo su valor absoluto es la distancia que hay entre el origen y la cabeza del vector y si el número entero es negativo será la misma distancia del origen a la cabeza del vector asociado a dicho número.

²³ Cada sesión corresponde a un periodo de clase de la institución educativa.

Definición de orden en los números enteros:

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, se dice que a es menor que b , y se escribe $a < b$, si a está posicionado a la izquierda de b en la recta numérica y se dice que a es mayor que b , y se escribe $a > b$, si a está posicionado a la derecha de b en la recta numérica.

Definición de Adición de Números Enteros

Adición de dos números enteros con igual signo: La adición de dos números enteros con igual signo, corresponde al número entero en la recta numérica asociado a la posición final de la cabeza del segundo vector (vector que representa el segundo número entero), al cual le fue agregado inicialmente un primer vector con igual sentido (vector que representa el primer número entero).

Adición de dos números enteros con distinto signo: La adición de dos números enteros con distinto signo, corresponde al número entero en la recta numérica asociado a la posición final de la cabeza del segundo vector (vector que representa el segundo número entero), el cual le fue agregado inicialmente un primer vector con distinto sentido (vector que representa el primer número entero).

Definición de sustracción de dos Números enteros: La sustracción de dos números enteros cualesquiera está definida como la suma del primer número entero con el opuesto del segundo número entero. Simbólicamente se representaría así:

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces $a - b = a + (-b)$

Ahora pasamos a la descripción de las actividades realizadas por los estudiantes en forma detallada, dicho análisis se hará en dos partes: por un lado se analiza la socialización de cada actividad en el aula de informática y por otro lado, se realiza el análisis de los trabajos realizados por los 14 grupos.

4.2 ACTIVIDADES DE CONCEPTUALIZACIÓN DE NÚMERO ENTERO

El tema de conceptualización de número entero está constituido por cinco actividades, cada una con su respectiva etapa de socialización.

Con estas actividades se pretendía que el estudiante construya por sí mismo la recta numérica utilizando el software geométrico Cabri II Plus, de modo que entienda que los números positivos están a la derecha de cero (o hacia arriba) y que los números negativos están a la izquierda de cero (o hacia abajo), además observen que los números negativos son opuestos a los números positivos, o viceversa; asimismo, se pretendía demostrar que a

cada vector en la recta, le corresponde un número entero (positivo o negativo) y a cada número entero le corresponde un vector en la recta.

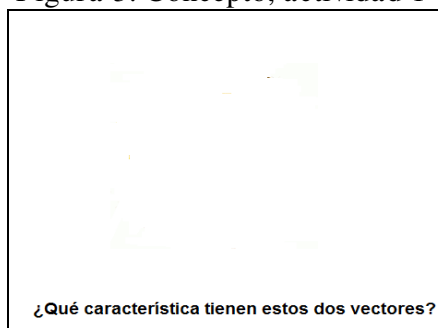
La guía desarrollada por los estudiantes de séptimo grado puede ser consultada en el anexo 2, a continuación solo se presentaran las actividades y su respectivo análisis.

El trabajo inicia con la explicación de las actividades a desarrollar y de las reglas que tendrán éstas, algunas de las cuales eran: los grupos debían desarrollar las actividades por sí mismos, por lo cual, el profesor no intervendría con ninguna ayuda, a excepción que fuera algún problema con el programa o con el computador, tampoco podían preguntar al resto de los grupos, ni a ningún estudiante que no perteneciera al suyo; el tiempo estipulado para las actividades era de 40 a 50 minutos máximo, dependiendo de la actividad a desarrollar.

Explicadas y entendidas las reglas para la ejecución de las actividades, se procedió a enunciar algunas recomendaciones, como por ejemplo: guardar el archivo cada 5 o 10 minutos, por si se presentaba algún fallo eléctrico o de mantenimiento del computador; las respuestas a las preguntas planteadas, deberían ser resueltas en el archivo de Cabri de cada actividad, es decir, todo era electrónico, no se recibiría nada por escrito, cuando culmine la sesión no debían apagar el computador, cada vez que se resuelva una nueva actividad, se cambiaría al estudiante por otro del mismo grupo, con el fin que manejaran el computador todos los integrantes del grupo. Una vez terminadas las explicaciones, se dio inicio al desarrollo de la actividad 1, para ello se pidió a los estudiantes que abrieran el archivo de Cabri, el cual solo constaba con una pregunta, ya que eran los estudiantes, los que realizarían la construcción. A continuación se presenta la actividad y una imagen de cómo fue entregado el archivo a los estudiantes:

1. (*Archivo Figura 1.Fig.*) Construir dos puntos cualesquiera, nombrarlos como A y B, luego unir los puntos A y B con dos vectores, uno de A hacia B y el otro de B (C) hacia A (D). ¿Qué característica tienen estos dos vectores? (*Ver figura 3*)

Figura 3. Concepto, actividad 1



Esta actividad pretendía que los estudiantes comiencen a formar nociones matemáticas como las de concepto, tamaño y dirección de un vector, el cual era la base para el resto de las actividades, puesto que el modelo de desplazamiento maneja dichas herramientas para el desarrollo del tema de los números enteros. Además, se observaría el manejo del computador y del programa Cabri por parte de los estudiantes, con el fin de identificar qué tan efectivo y dinámico sería la utilización de estos, es decir, el papel de la mediación tecnológica en el desarrollo de las actividades. Cabe señalar que todos los grupos realizaron el desarrollo de la actividad a excepción del grupo 14, el cual entregó su archivo en blanco, puesto que, los estudiantes olvidaron guardar sus avances y en algún momento un integrante del mismo grupo desconectó accidentalmente el computador perdiéndose todo lo hecho por el grupo.

La socialización de dicha actividad se realizó llamando a tres estudiantes, cada uno perteneciente a grupos diferentes (grupos 4, 7 y 12), a que pasaran al computador principal (este se conectaba a un televisor LCD de 42" en el cual se podría ver lo realizado por los estudiantes) y que realizaran lo que habían hecho cada uno en su computador, además, se pidió al resto de los grupos que hicieran silencio hasta que terminaran de mostrar los tres estudiantes lo hecho por ellos. Una vez culminaron los tres estudiantes, se efectuaron preguntas abiertas a todo el grupo, algunas de ellas fueron: ¿Lo realizado por los estudiantes está bien o está mal?, ¿Por qué?, ¿Les faltó algo en su actividad?, obteniendo una respuesta en común:

Grupos 1 y 8: *“Profe, el grupo 2 está bien, pero a los grupos 7 y 12 les faltó escribir que los vectores tienen el mismo tamaño”*

El siguiente paso fue la construcción y explicación de la actividad por parte de uno de los integrantes de esta investigación, con el fin de estandarizar el desarrollo de dicha actividad. Con lo anterior se dio por culminada la primera actividad.

El paso a seguir por parte de los investigadores fue la recolección de toda la información que se encontraba en los computadores, con el fin de analizarla. A continuación se presenta estadísticamente los resultados obtenidos y se efectúa un análisis sobre respuestas dadas por algunos grupos.

Resultados de la primera actividad de conceptualización de Número Entero

Tabla 2. Concepto, actividad 1


<i>Primera actividad</i>	<i>Frecuencia Absoluta</i>	<i>Frecuencia Relativa</i>
Correctas	9	64,28%
Incorrectas	4	28,57%
Incompletas	0	0,00%
En Blanco	1	7,15%
Total Grupos	14	100%

Gráfica 1. Concepto, actividad 1

De lo anterior se observa que nueve grupos contestaron y realizaron la construcción correctamente, es decir, tienen un manejo adecuado de las herramientas del programa, ejemplo de ello, es lo realizado por los grupos 2 y 4 (el grupo 4 había hecho la actividad en el computador principal el día de la socialización de ésta), en donde sale a flote el buen manejo de Cabri y el desarrollo acertado tanto de la actividad como de la respuesta a la pregunta, poniendo de manifiesto, la buena fluidez algorítmica de los estudiantes (Ver figura 4 y 5).

Cabe señalar que los archivos en los cuales trabajarían los estudiantes tenían un fondo diferente en cada una de las actividades, esto con el fin de dar más dinamismo, mejor presentación y que el trabajo sea más agradable para ellos.

Figura 4. Concepto, construcción grupo 2



RESPUESTA: Que cada punto es inicio y final de un vector

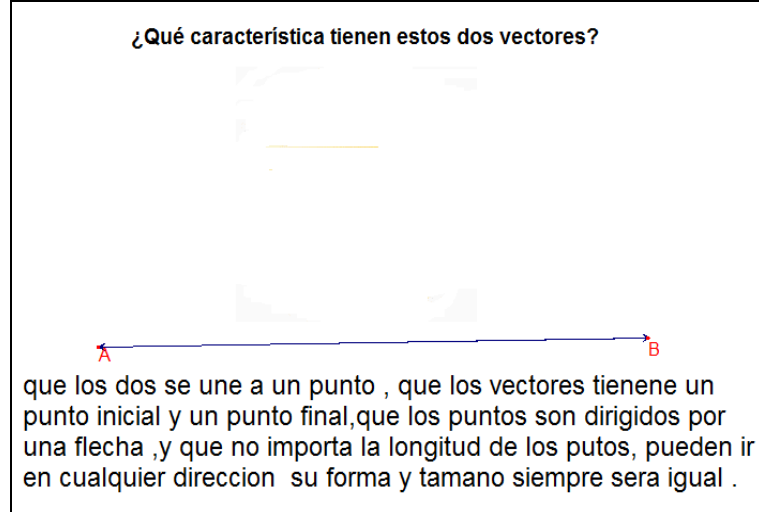
uno va hacia la izquierda y otro hacia la derecha

respuesta: que cada vector está conectado a un punto

tiene la misma forma

¿Qué característica tienen estos dos vectores?

Figura 5. Concepto, construcción grupo 4



Estos grupos comprenden que los vectores en la construcción pedida, presentan la misma longitud y dirección opuesta, además ponen de manifiesto que no importa la longitud de los vectores, siempre serán iguales, mostrando así, la ejecutabilidad de la representación semiótica gráfica, al pasar de un registro semiótico a otro.

En cuanto a las respuestas incorrectas, cuatro grupos fallaron en el desarrollo de la actividad, probablemente, no comprendieron como hacer la construcción en Cabri, dando respuestas erróneas. Veamos las construcciones y respuestas dadas por los grupos 1 y 11:

Figura 6. Concepto, construcción grupo 1

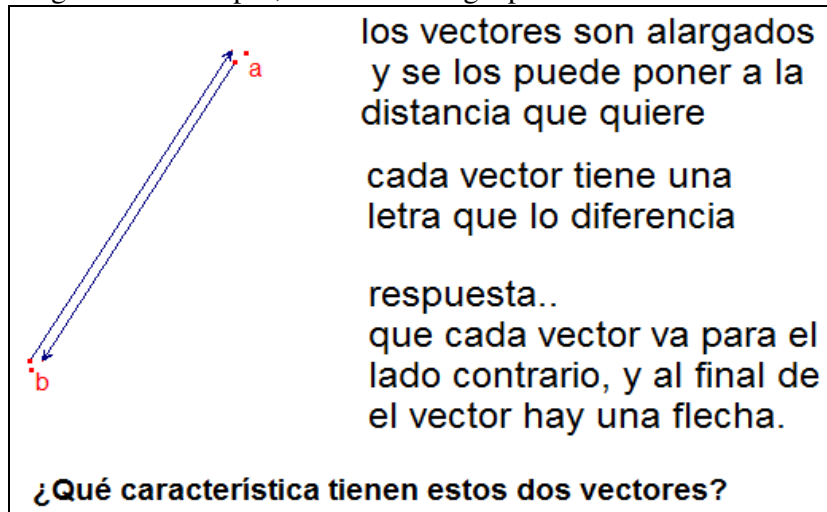
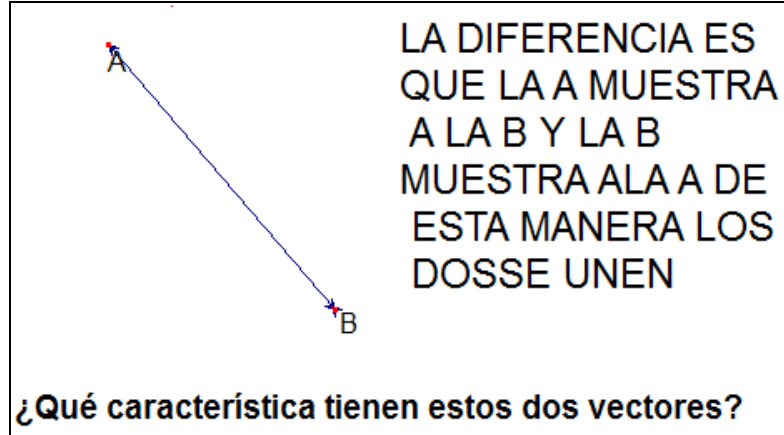


Figura 7. Concepto, construcción grupo 11



El grupo 1 no realiza la construcción correctamente, puesto que un vector parte de un punto “a” y finaliza en “b”, pero el vector “ab” ni siquiera toca a estos puntos, asimismo, el otro vector parte de puntos diferentes y sus tamaños no son los mismos, otro error es el nombre que le dan a los puntos, el cual es realizado con letras minúsculas, mostrando que no habían puesto atención en las clases introductorias, donde se habló que los puntos se nombran con letras mayúsculas. El grupo 11, aunque realiza su construcción bien, la respuesta se basa en las letras más no en los vectores, que era lo que se pedía.

Hay algo muy importante que se debe decir de lo analizado en las actividades realizadas por los estudiantes y es que de los 14 grupos, 12 daban a entender (en sus respuestas) que “*los vectores iban, uno hacia un lado y el otro hacia el otro*”, y 10 grupos daban a entender que “*los vectores tenían el mismo tamaño*”.

En algunos casos, los investigadores realizaron algunas interpretaciones de lo escrito por los estudiantes, veamos un ejemplo:

Grupo 2: “*Tienen la misma forma*”

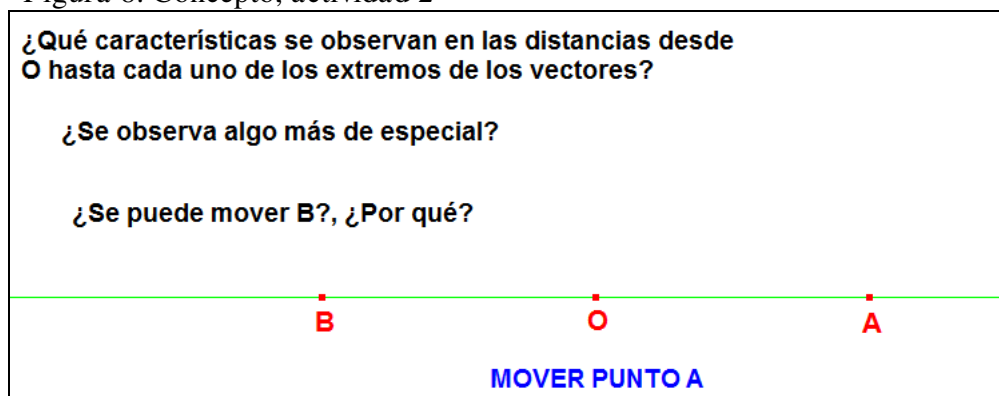
Con lo cual el grupo se refería a la longitud del vector. Asimismo, se observó que muchos omitían letras o palabras, aumentaban letras, etc., con lo cual sale a flote las dificultades que tienen los estudiantes al escribir, como errores de ortografía, redacción y contenido.

En la siguiente sesión se inicia nuevamente con la explicación de la actividad a desarrollar, se informa que las reglas y las recomendaciones serán las mismas que se dieron para la ejecución de la actividad 1, para luego, pasar al desarrollo de la actividad número 2, además se les informó que debían hacer el cambio de la persona que manejaría el computador, con

el fin de que todos los integrantes interactuaran con el programa. En esta ocasión, el archivo de Cabri entregado contenía tres preguntas y una recta, sobre la cual se encontraban ubicados tres puntos A, B y O, con la característica de que el punto B dependía del A, aunque los estudiantes no lo sabían. La actividad desarrollada y una imagen del archivo de Cabri entregado a los estudiantes se presentan a continuación:

2. (Archivo Figura 2.Fig.) Sobre la recta dada construir desde el punto O hacia la derecha el vector OA y desde O hacia la izquierda el vector OB. ¿Qué características se observan en las distancias desde O hasta cada uno de los extremos de los vectores?, ¿Se observa algo más de especial?, ¿Se puede mover B?, ¿Por qué? (Ver figura 8)

Figura 8. Concepto, actividad 2



La actividad fue desarrollada con normalidad, una vez acabaron todos los grupos se invitó a socializar a tres integrantes de grupos diferentes (Grupos 3, 8 y 14). En esta actividad se pretendía: formar una idea más clara respecto a los vectores, igualmente, que observasen que en esta ocasión, ellos parten de un mismo punto (O) pero en direcciones opuestas y que su longitud es la misma. Respecto a la última pregunta, “¿se puede mover B?”, esta pretendía que los estudiantes entendiesen que B dependía de A, puesto que este punto (B) solo se movía si se hacía el arrastre del punto A. En la socialización hecha se observó que los grupos 3 y 8 realizaron la construcción bien, pero el grupo 14 no lo hizo correctamente. Con la culminación de los tres grupos, uno de los investigadores realizó la construcción en el programa y se procedió a responder las preguntas planteadas.

La puesta en común de las respuestas dadas por los grupos mostró que más del 80% resolvieron la primera pregunta correctamente:

Grupo 3: “Que tienen la misma distancia”

Grupo 10: “Las distancias de B a O y de O hasta A son iguales”

Grupo 5: *“Su tamaño es igual”*

Cabe resaltar que el grupo 10 dice de B hacia O y no de O hacia B, cuando se les pregunta por qué de B hacia O y no lo contrario, ellos responden:

“No importa profe, es lo mismo”.

Evidenciando que para ellos distancia y dirección es lo mismo. En este punto, fue necesario que uno de los investigadores aclarara que la distancia y la dirección son cosas diferentes y por tanto deberían replantear su respuesta.

En cuanto a la segunda pregunta se presentan respuestas tales como:

Grupo 1: *“Que uno va hacia la izquierda y el otro hacia la derecha”*

Grupo 3: *“Que los dos tienen el mismo inicio pero diferente final”*

Grupo 13: *“Que al mover A las distancias cambian pero los dibujos siguen siendo los mismos”*

En este caso se les preguntó a que se referían con dibujos y ellos contestaron: *“Las líneas con las flechitas”*, es decir a los vectores, evidenciando que habían estudiantes que todavía no manejaban la palabra *“vector”*, De lo anterior se observa que las respuestas dadas por algunos grupos concuerdan con lo que se deseaba, por tanto es evidente que el trabajo iba por buen camino.

Con respecto a la tercera pregunta se obtuvieron respuestas tales como:

Grupo 7: *“No se puede mover B por que el único punto que se puede mover es el punto O”*

Grupo 11: *“La B no se puede mover por que la A es la primera y la B es la última por eso no se mueve”*

Mostrando que el 100% de los grupos contestaron acertadamente a la pregunta, pero nadie pudo explicar con claridad por qué el punto B no se podía mover. Cabe resaltar que esta pregunta pretendía que los estudiantes fuesen construyendo una concepción acerca de los objetos independientes (como el punto A) y de los objetos dependientes (como el punto B), ya que más adelante se utilizarían para la construcción del conjunto de los números enteros, además, implícitamente se abarcaba el manejo de lo que son las funciones (tema que se estudia en grado noveno). Lo anterior pone de

manifiesto uno de los dos niveles por los que atraviesa el uso de la tecnología material o simbólica: *la reorganización*.

Con esta socialización se culminó con la actividad número 2, el paso siguiente fue guardar las construcciones hechas por todos los grupos con el fin de analizarlas. A continuación se presenta estadísticamente los resultados obtenidos:

Resultados de la segunda actividad de conceptualización de Número Entero

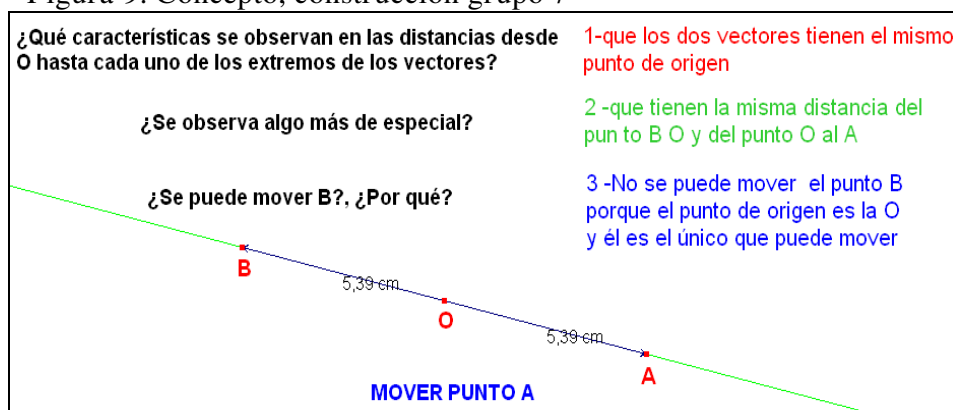
Tabla 3. Concepto, actividad 2

<i>Segunda actividad</i>	<i>Frecuencia Absoluta</i>	<i>Frecuencia Relativa</i>
Correctas	10	71,42%
Incorrectas	4	28,57%
Incompletas	0	0%
En Blanco	0	0%
Total Grupos	14	100%

Gráfica 2. Concepto, actividad 2

Culminado el análisis, se observó que 10 grupos realizaron la construcción y el desarrollo de las respuestas correctamente, a continuación se presenta el desarrollo hecho por el grupo 7:

Figura 9. Concepto, construcción grupo 7

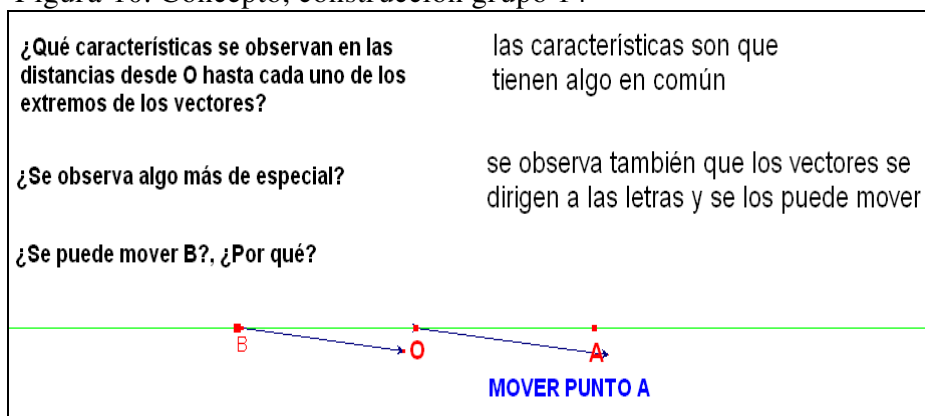


Este grupo, al igual que los otros, además de comprender que los vectores en la construcción pedida presentan la misma longitud, también son de sentido opuesto. Así mismo, se pone de manifiesto la ejecutabilidad de la Representación Semiótica Gráfica, ya que la recta dada ha sido movida de su posición inicial y a pesar de eso las respuestas dadas por los grupos siguen siendo correctas; otro punto a resaltar es que todos los grupos

utilizaron la herramienta distancia o longitud del programa para saber qué pasa con las distancias, de donde se podría decir que el manejo del programa ha ido mejorado notablemente. .

Por otro lado, cuatro grupos contestaron incorrectamente, aunque tres de ellos contestaron las preguntas 1 y 3 correctamente, no sucedió lo mismo con la pregunta 2; en cuanto al otro grupo, éste no comprendió la construcción y tuvo un desarrollo erróneo de dicha actividad, a continuación presentamos la construcción realizada por el grupo 14:

Figura 10. Concepto, construcción grupo 14



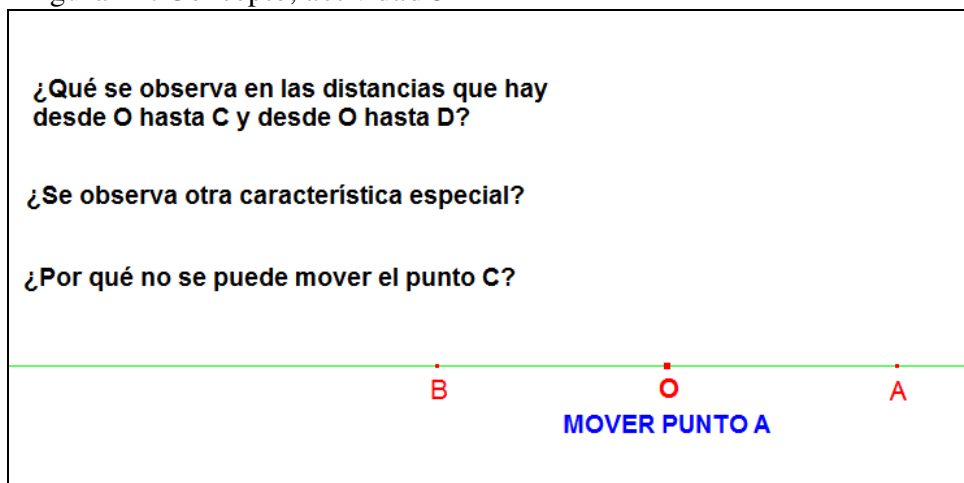
El gráfico anterior muestra que el vector OA no tiene la dirección correcta, puesto que su punto final no coincide con el punto A ubicado sobre la recta, en cuanto al vector OB, éste tiene su inicio en el punto B, pero su punto final no coincide con el punto O, lo que no concuerda con lo planteado en la actividad, de donde, se concluye que el grupo 14 no pudo contestar bien a ninguna de las tres preguntas planteadas, debido a que no realizó de forma correcta la construcción pedida, además se intuye que la construcción esta errónea por que no leyeron con atención la guía dada.

Ahora pasamos con el desarrollo de la actividad 3, la cual se ejecutaría con la misma metodología de las dos actividades anteriores. En esta ocasión, se les pidió a los estudiantes que desarrollaran la actividad con mayor atención, concentración y una mejor redacción en sus respuestas, puesto que ya era la tercera actividad a realizar y su trabajo debería ir mejorando cada día más. Durante el desarrollo, se presentaron inconvenientes con algunos computadores (averiguando se concluyó que era un problema eléctrico) lo que llevo a que 4 grupos no realizaran la actividad completamente, respecto al resto de los grupos, éstos concluyeron con éxito su trabajo. El archivo de Cabri entregado a los estudiantes, constaba de tres preguntas y de una recta sobre la cual se encontraban ubicados tres puntos A, B y O, con la característica de que el punto B dependía del A, aunque los

estudiantes no lo sabían. La actividad desarrollada y una imagen del archivo de Cabri entregado a los estudiantes se presentan a continuación:

3. (Archivo *Figura 3.Fig.*) Sobre la recta dada trazar un punto C a la derecha de A, de tal manera, que la distancia AC sea la misma que OA y unir los puntos OC con un vector; asimismo, trazar un punto D a la izquierda de B, de tal manera, que la distancia BD sea la misma que OB y unir con un vector los puntos OD. ¿Qué se observa en las distancias que hay desde O hasta C y desde O hasta D? ¿Se observa otra característica especial?, ¿Por qué no se puede mover el punto C? (Ver figura 11)

Figura 11. Concepto, actividad 3



Concluido el trabajo, se procedió a la socialización de dicha actividad, en la cual, intervino un integrante de cada uno de los grupos 1, 5 y 8. Durante la socialización se observó que el grupo 1 no realizó correctamente la construcción, mientras que los grupos 5 y 8 acertaron en ella. Cuando culminaron los tres estudiantes, uno de los investigadores hizo la construcción correctamente, para dar inicio a la solución de las preguntas. En cuanto a la primera pregunta, más del 90% respondió correctamente, veamos algunas respuestas:

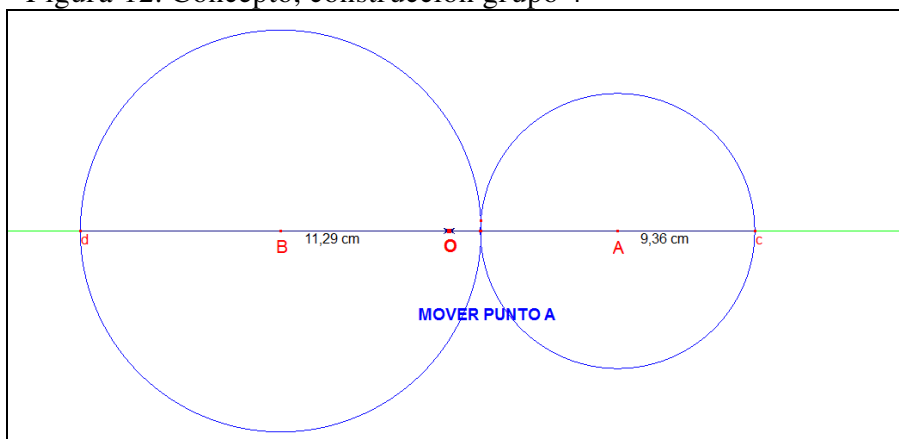
Grupo 2: “*Son iguales en longitud*”

Grupo 12: “*Se observa que los tamaños son iguales*”

Grupo 1: “*Profe se mira que las distancias son iguales, pero a nosotros no nos dio igual*”

A lo que se les respondió, “*probablemente hicieron mal la construcción*”, para confirmar lo dicho, se revisó la construcción del grupo 4 y efectivamente, ésta se había realizado incorrectamente, veamos:

Figura 12. Concepto, construcción grupo 4



En el gráfico se observa que la construcción no toma a la longitud AO como radio de la circunferencia, si no que ha sido hecha con otra longitud arbitraria, por eso al arrastrar el punto A, el radio de las circunferencias cambia y de ahí la pregunta que planteaban. Cabe señalar que esta construcción se la proyectó en el TV y se realizó la respectiva explicación a todos los grupos, recomendándoles que para las próximas construcciones tengan mucho cuidado y lean bien la guía que se les entrega.

La segunda pregunta, tuvo respuestas tales como:

Grupo 3: “*La C y la D son totalmente opuestas*”

Grupo 6: “*Que D está a la izquierda de O y C a la derecha*”

Grupo 12: “*Que los vectores son opuestos*”

Lo cual muestra que la pregunta fue respondida correctamente. Ahora, la tercera pregunta tuvo soluciones como estas:

Grupo 10: “*Profe no se puede mover porque D no es el punto principal, es un punto secundario*”

Grupo 7: “*La C no se puede mover porque no es el punto de origen*”

Grupo 1: “*No se puede mover porque está dependiendo de la letra A*”

Saliendo a flote la buena interpretación que realizaron los estudiantes a la pregunta planteada (contrario a la respuesta de la pregunta 3 de la actividad

2, la cual no había podido ser justificada con claridad por parte de los grupos), luego se le aclaró a los grupos, que en las construcciones no importaban las letras, sino los puntos, puesto que los investigadores habían notado que los estudiantes se basaban mucho en las letras y no al punto en sí. Terminado esto se procedió, por parte de los investigadores, a realizar el estudio de las construcciones hechas por todos los grupos, obteniendo los siguientes resultados:

Resultados de la tercera actividad de conceptualización de Número Entero

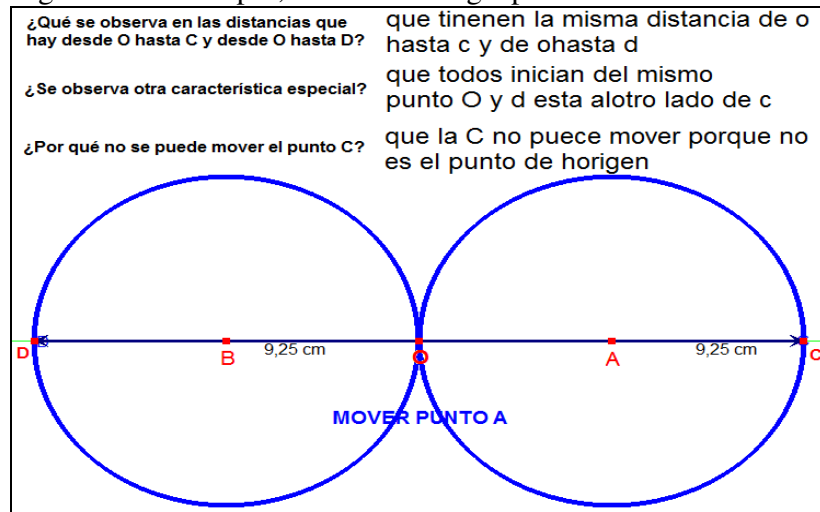
Tabla 4. Concepto, actividad 3

<i>Tercera actividad</i>	<i>Frecuencia Absoluta</i>	<i>Frecuencia Relativa</i>
Correctas	7	50,00%
Incorrectas	3	21,42%
Incompletas	4	28,57%
En Blanco	0	0%
Total Grupos	14	100%

Gráfica 3. Concepto, actividad 3

La tabla muestra que siete grupos contestaron correctamente, esto debido a que ellos dieron solución a las tres preguntas planteadas. El grupo 7 fue el que mejor realizó la construcción. En ella se observó el buen manejo de Cabri (cambio de grosor a las circunferencias, a las rectas, etc.), algo bien importante es que cerca del 90%, utiliza herramientas del programa para resolver las actividades, entre ellas, la circunferencia y distancia o longitud; se resalta nuevamente la ortografía que ellos tienen, la cual no es la mejor, el gráfico es prueba de ello. Veamos la construcción hecha por este grupo:

Figura 13. Concepto, construcción grupo 7



Con lo anterior, se muestra la gran apropiación que tuvieron la mayoría de los grupos respecto al desarrollo de la actividad, por que decimos la mayoría, porque de los cuatro grupos que tuvieron sus actividades incompletas, tres de ellos, iban por buen camino. De los desarrollos incorrectos se puede decir que éstos se presentaron por no estar concentrados en su trabajo, pues como se puede apreciar en el siguiente gráfico, la construcción realizada del punto O hasta C está bien, pero no pasa lo mismo con la del punto O hasta D, llevándolos a dar respuestas erróneas, veamos la construcción realizada por el grupo 9:

Figura 14. Concepto, construcción grupo 9

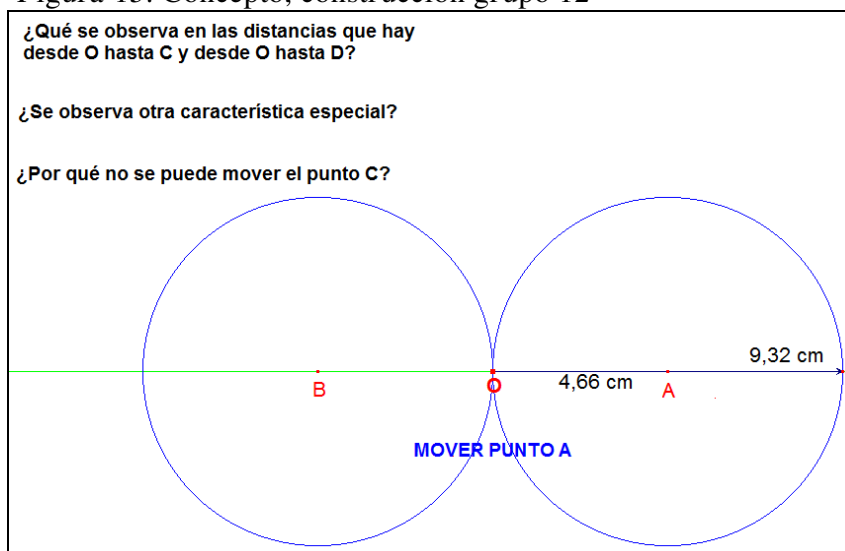


Según el grupo mencionado, las distancias no son iguales, lo cual surge de la mala construcción de las circunferencias, ya que, el punto opuesto a D, respecto a B, no coincide con el punto O, esto se pudo observar al mover el

punto A. Lo mismo sucede con las construcciones de los otros dos grupos, en las cuales, al realizar las circunferencias no tuvieron en cuenta a la longitud AO como radio y realizaron dichas circunferencias con una longitud arbitraria, como es el caso del grupo 1, del cual se habló al inicio del análisis de la pregunta 1 de esta actividad.

Como ya se había mencionado al inicio del análisis de la actividad 3, 4 grupos presentaron el desarrollo con partes o respuestas incompletas. Dos de los grupos no alcanzaron a terminar, ya que cuando estaban desarrollando su trabajo, el computador se les reinició y no habían guardado lo adelantado, teniendo que repetir la construcción sin alcanzar a terminarla. En cuanto a los otros dos grupos no completaron la actividad por estar haciendo cosas que no tenían nada que ver con el trabajo pedido. Cabe resaltar que de estos cuatro grupos, tres de ellos tenían una construcción buena, un ejemplo de ello es la del grupo 12, en la que se observó que las dos circunferencias ya estaban construidas y si se movía el punto A, éstas cambiaban de igual manera, además tenían las longitudes OA y OC, veamos:

Figura 15. Concepto, construcción grupo 12



Con lo anterior culminamos el análisis de la actividad 3 y pasamos al desarrollo de la actividad 4, en la cual ya se comenzaba con la utilización de los números enteros, puesto que al primer vector construido hacia la derecha (vector OA) se lo nombraba con el signo más y el número 1 (+1) y al vector que se dirigía hacia la izquierda con el menos y el número 1 (−1). Con esta actividad se pretendía que los estudiantes comiencen a relacionar cada vector con su respectivo número y viceversa, cada número con su vector. A continuación se presenta la actividad a desarrollar por parte de los estudiantes y una imagen del archivo de Cabri entregado a los mismos:

4. (Archivo Figura 4.Fig.) Ahora nombraremos al vector OA, el cual está dirigido hacia la derecha con un $+$ y el número 1, y al vector dirigido hacia la izquierda (OB) con un $-$ y el número 1. ¿Con que número representarían al vector desde O hasta C?, y al vector desde O hasta D? Si continuáramos con los vectores hacia la derecha, ¿Con que números seguiría su representación? ¿Y hacia la izquierda? (Ver figura 16)

Figura 16. Concepto, actividad 4



El desarrollo de esta actividad se hizo sin ninguna novedad, todos los grupos realizaron su actividad, a excepción de uno (Grupo 14), el cual entregó en blanco su actividad, puesto que al término de dicha actividad, ellos no habían grabado y no acataron la recomendación de no apagar el equipo antes de que uno de los investigadores revisara su desarrollo, perdiéndose todo lo trabajado por ellos

En la socialización de la primera pregunta, se obtuvo respuestas tales como:

Grupo 1: “Profe se representaría con el $+2$ y el -2 ”

Grupo 6: “El vector OA si continuáramos hacia la derecha se pusiera $+2$ y con el vector OD se pondría -2 ”

Grupo 9: “Sería con el $+2$ a la derecha y con el -2 a la izquierda”

Además, a la pregunta ¿Por qué serían estos números?, se dieron respuestas tales como:

Grupo 9: “Lo que pasa es que el vector OD es el doble del vector OC”,

Grupo 2: “Se va aumentando de 1 en 1”

Grupo 10: “Profe es muy fácil, continuamos contando de uno en uno”

En este último caso, se les aclaró que no era el conteo de números, sino que éstos, y sus respectivos vectores, iban aumentando su longitud en una unidad.

Luego, se continuó con la pregunta 2 y 3, que al igual que la pregunta 1, tuvo un porcentaje muy alto de respuestas correctas:

Grupo 2: “Con el número $+3, +4, +5, +6, +7, \dots$ y con $-3, -4, -5, -6, -7, \dots$ ”

Grupo 4: “Seguiríamos con $+3, +4, +5$ y hacia la izquierda seguiríamos con $-3, -4, -5$ ”

Grupo 12: “El número que sigue es el $+3$ y los demás según los vectores requeridos hacia la derecha y hacia la izquierda el número -3 ”

Cabe resaltar la respuesta del grupo 2, puesto que cuando iban en el número entero $+5$, ellos dijeron puntos suspensivos, y cuando se les preguntó del porqué de éstos, ellos respondieron: “*Profe los puntos suspensivos son porque siguen hasta el infinito y nunca acaban*”, mostrando que habían grupos que manejaban una noción del infinito y su aplicación en las matemáticas.

El paso a seguir por parte de los investigadores, fue el análisis de las actividades de todos los grupos, las cuales generaron la siguiente información:

Resultados de la cuarta actividad de conceptualización de Número Entero

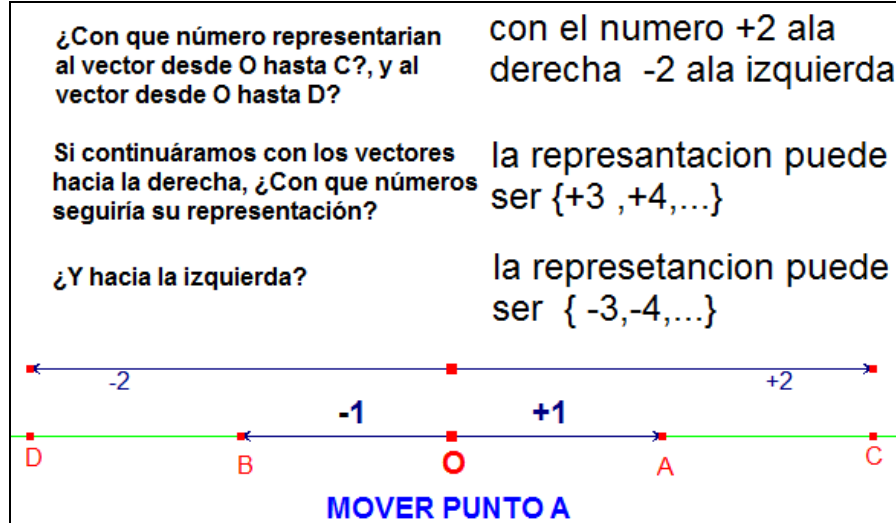
Tabla 5. Concepto, actividad 4

<i>Cuarta actividad</i>	<i>Frecuencia Absoluta</i>	<i>Frecuencia Relativa</i>
Correctas	11	78,57%
Incorrectas	2	14,28%
Incompletas	0	0%
En Blanco	1	7,14%
Total Grupos	14	100%

Gráfica 4. Concepto, actividad 4

De los 11 desarrollos realizados correctamente, el grupo 10 es el que mejor lo hizo, a continuación se presenta las respuestas dadas por ellos:

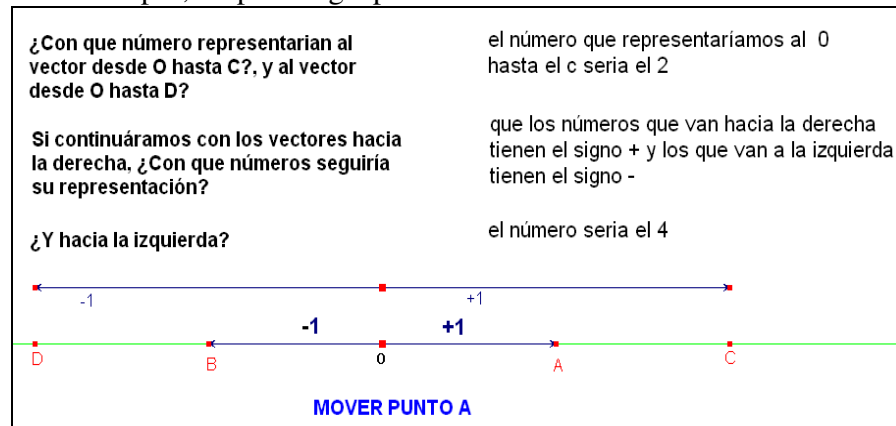
Figura 17. Concepto, respuesta grupo 10



En la imagen, se observa que las respuestas se encuentran desarrolladas correctamente, además, para la segunda y tercera pregunta, este grupo utiliza las llaves para dar sus respuestas, dando a entender que algunos grupos recuerdan que los números se los puede representar mediante un conjunto por extensión, también, el uso de los puntos suspensivos vuelve a salir a flote, esto con el fin de indicar que el conjunto sigue indefinidamente y que no termina. De lo anterior se puede decir que los estudiantes ya no toman a los números aisladamente, sino que los comienzan a agrupar, dando así los primeros pasos hacia la creación del conjunto de los números enteros, asimismo, se evidencia la fluidez conceptual que iban desarrollando ellos con cada actividad resuelta.

Con respecto a las dos actividades que se desarrollaron incorrectamente, se podría decir que fue el grupo 13 el que menos aciertos tuvo, a continuación se presentan sus respuestas:

Figura 18. Concepto, respuesta grupo 13



La respuesta 1 tiene algo de verdad pero si se observa en el grafico el vector que va desde O hasta C tiene el número +1 y el vector que va desde O hasta D tiene el -1, de donde se observa que la actividad no fue entendida por dicho grupo, ahora respecto a las respuestas 2 y 3 ni siquiera se aproximaron a una respuesta correcta, muy probablemente por que no leyeron con atención la pregunta, ya que se les estaba preguntando por los números y ellos respondieron que los que van a la derecha llevan el signo + y los de la izquierda el signo - sin hacer ninguna referencia respecto a los números; además, se encontró una respuesta que no se sabe a qué pregunta pertenecía, si a la 2 o a la 3, puesto que está se encontraba muy lejos de donde estaban las preguntas y para mostrar la imagen, fue necesario acomodarla, la respuesta es: *“El número seria el 4”*.

Estas cuatro actividades culminaban con la siguiente pregunta:

¿Qué característica especial se podría concluir de los vectores que van hacia la derecha, con respecto de los que van hacia la izquierda? ¿Y de los números que los representan?

La respuesta a esta pregunta, debía ser consignada en un archivo de Cabri, con el nombre de *Respuesta Grupo (Número de grupo)*. Una vez que todos los grupos culminaron, se realizó una socialización sobre las respuestas que habían escrito en su respectivo archivo, entre las cuales se pueden destacar:

Grupo 2: *“Que los vectores siempre serán opuestos y que los números tendrán símbolos opuestos”*

Grupo 4: *“Que los vectores que van a la derecha se simbolizan con un + y los que van a la izquierda con un - y los números tienen que ir subiendo”*

Grupo 9: *“La característica de esta es que para la derecha es + y al contrario es - y que el vector OA es + y el vector OB es - y de los que los representan a la derecha serian +1+2+3+4...etc. Y de la izquierda serian -1 -2 -3...etc., o sea opuestos”*

Grupo 10: *“Que los vectores que van hacia la derecha son representados por un +, los que van a la izquierda están representados por un - y el O es llamado número neutro, derecha positivo a la izquierda negativo. Los números que los representan son los conjuntos de los positivos y los negativos”*

Grupo 13: *“Podemos concluir que son opuestos y iguales que así los vectores van desde la misma medida e igualdad”*

Todas las respuestas hablan sobre los signos + y -, asimismo de la oposición que hay entre ellos, además el grupo 10 menciona que el punto O es el número 0 (cero) y que es llamado neutro, igualmente que los números que representan a los vectores son el conjunto de los números negativos y el conjunto de los números positivos, mostrando que hay grupos que han consultado o leído algo en sus respectivos hogares.

Resumiendo, se diría que el objetivo de la primera actividad fue alcanzado satisfactoriamente, puesto que los estudiantes, al finalizar ésta, ya manejaban una noción de vector, su representación gráfica, su relación biunívoca con los números enteros (aunque en este momento no se había dado una definición formal de este conjunto), conocían la oposición que se presentaba entre los signos + y -, además ya concluían que dos números como por ejemplo +4 y -4 representaban dos vectores de igual longitud pero en direcciones opuestas.

4.3 ACTIVIDADES DE ORDEN EN LOS NÚMEROS ENTEROS

Luego de haber realizado las actividades de conceptualización de número entero, se trabajó el orden en ellos con tres actividades, las cuales fueron diseñadas empleando la recta numérica y Cabri II Plus. Para ello se recurrió a la posición de los números enteros en la recta numérica, puesto que, el modelo de desplazamiento no puede ser utilizado para explicar el orden en dichos números.

Se propuso actividades donde se planteó a los grupos de estudiantes problemas con situaciones de la vida real, en las cuales puedan utilizar los números enteros posicionados en la recta numérica para dar respuesta a cada una de las preguntas.

Las tres actividades fueron desarrolladas en cuatro sesiones de 50 minutos cada una, al igual que las anteriores actividades se presentó a los estudiantes una guía que contenía el enunciado y las preguntas de cada actividad, como también los archivos en Cabri II Plus guardados con anticipación en cada computador de la sala de informática pedida a la Institución Educativa Municipal de Cabrera para el desarrollo de esta investigación.

Para su desarrollo se repitió el mismo mecanismo que se había trabajado anteriormente, el cual contemplaba una primera etapa de introducción y recomendaciones a los estudiantes de la institución de Cabrera para el desarrollo de cada una de las actividades; luego de ello, se recurrió a la puesta en desarrollo de la actividad correspondiente en el tiempo estipulado

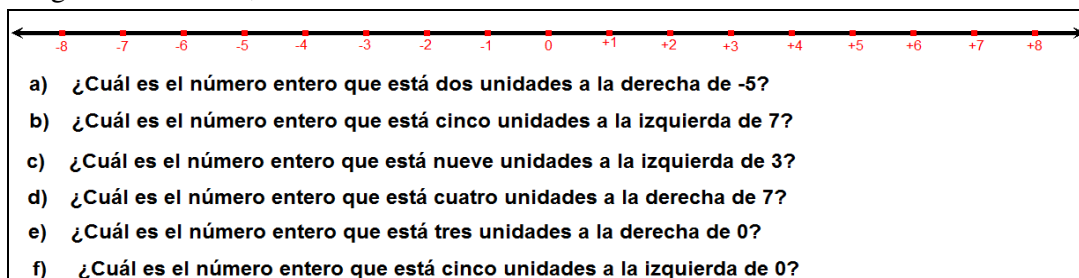
para dicho proceso y al final de cada actividad se desarrolló la socialización; en primera instancia de los estudiantes, para que de esta forma compartan a todo el salón su desarrollo y después de ello una socialización por parte del profesor encargado, dando en ella las correcciones, explicaciones y conclusiones correctas de cada actividad.

A continuación se presenta la actividad a desarrollar por parte de los estudiantes y una imagen del archivo de Cabri que fue entregado a los mismos:

1. (Archivo Figura 1.Fig.) Teniendo en cuenta la recta numérica contestar las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál es el número entero que está dos unidades a la derecha de -5?
 - b) ¿Cuál es el número entero que está cinco unidades a la izquierda de 7?
 - c) ¿Cuál es el número entero que está nueve unidades a la izquierda de 3?
 - d) ¿Cuál es el número entero que está cuatro unidades a la derecha de 7?
 - e) ¿Cuál es el número entero que está tres unidades a la derecha de 0?
 - f) ¿Cuál es el número entero que está cinco unidades a la izquierda de 0?
- (Ver figura 19)

Figura 19. Orden, actividad 1



La anterior actividad pretendía que los estudiantes comiencen a observar y a interpretar con posiciones elementales de números enteros, el orden que ellos tienen en la recta numérica como también, el diferenciar en la recta numérica el sentido derecho e izquierdo teniendo como referencia un número entero.

El desarrollo de la primera actividad transcurrió de la siguiente manera: inicialmente se realizó la lectura y explicación de la actividad, en esta intervención se leyó el enunciado detenidamente, posteriormente se explicó que la actividad consistía en encontrar un número entero teniendo como referencia otro entero, utilizando la recta numérica de Cabri II Plus, además se explicó que el cero era el centro de la recta numérica y que a la derecha del cero estaban los números enteros positivos y que a su izquierda estaban los enteros negativos, como también se dio a entender que el número que

aparecía en cada pregunta lo podían tomar como cero y con ello contar los espacios para encontrar los números pedidos. Posteriormente, se escuchó y se resolvió dudas durante un tiempo pertinente.

La pregunta hecha por parte de los estudiantes en dos ocasiones fue ¿Qué representaba el sentido derecho e izquierdo en la recta numérica?, a lo cual se respondió diciendo que busquen ellos mismo en grupo la respuesta en las actividades de conceptualización que ya se habían trabajado. Luego de haber dejado en claro cómo se tenía que desarrollar la actividad, se pidió a todos los grupos de estudiantes abrir el archivo de Cabri II Plus donde estaba la actividad y la recta numérica dinámica, esperando un tiempo prudente a todos los grupos.

Cuando los grupos ya tenían el archivo abierto comenzó el tiempo de desarrollo de la actividad, el cual en un inicio fue de 30 minutos (dejando 10 minutos para la socialización, ya que como se dijo al principio, toda la actividad acarrea una sección de 50 minutos) en este tiempo no hubo preguntas por parte de los grupos, y solo se observó cómo realizaban la actividad, limitándose solamente a dar recomendaciones tales como: guardar lo realizado en su respectivo computador, realizar el trabajo en grupo y no individual. Cabe resaltar que algunos grupos por no estar atentos de la explicación de entrada tenían dificultades para llegar a las respuestas.

Se esperó a que terminaran todos los grupos, no todos lo hicieron en los 30 minutos que se había dicho al principio de la actividad y se optó por darles cinco minutos más, lo cual implicó modificar el tiempo del desarrollo de la actividad. Después de que todos acabaron, se pidió al grupo 5 que pase al frente y comparta el desarrollo de la primera pregunta con los demás estudiantes; el estudiante ayudado por la recta numérica de Cabri II Plus respondió a la siguiente pregunta:

¿Cuál es el número entero que está dos unidades a la derecha de -5?

En su desarrollo se pudo apreciar que tomo como número de referencia al entero negativo -5 y contó de forma adecuada los dos espacios a la derecha de este número encontrando en la misma recta que el número pedido era el -3.

Igualmente paso con los representantes de los grupos 9, 11 y 13 al responder las preguntas siguientes, quedando claro de que la utilización de Cabri II Plus les dio a todos los estudiantes una mediación visual para llegar a la respuesta. A continuación se les preguntó a los grupos 5 y 12 que si las respuestas de sus compañeros eran correctas, obteniendo afirmaciones tales como:

“Profe está bien ya que el número que está a la derecha de -5 es -3 entre ellos hay dos espacios”

Después se resolvió las preguntas que faltaban, afirmando con ello, el correcto desarrollo por parte de los grupos que habían salido al frente. Por último, se dijo a todo el grupo que la clave en la actividad era la de contar los espacios de la recta numérica más no las posiciones de los números enteros inscritos en ella, ya que si se hacía de esta forma, el resultado al dar el número sería erróneo. A pesar de la modificación del tiempo de ejecución de la actividad, esta se desarrolló en el tiempo estipulado en un comienzo, puesto que, el tiempo dado de más, se recuperó en la socialización de la actividad. Luego se pidió a los estudiantes dejar los computadores encendidos y que salgan en orden, con el fin de obtener todos los archivos realizados por ellos. A continuación se presentan los resultados del análisis hecho a todas las actividades:

Resultados de la primera actividad de orden en los Números Enteros

Tabla 6. Orden, actividad 1

<i>Primera actividad</i>	<i>Frecuencia Absoluta</i>	<i>Frecuencia Relativa</i>
Correctas	10	71,43%
Incorrectas	3	21,43%
Incompletas	1	7,14%
En Blanco	0	0,00%
Total Grupos	14	100,00%

Gráfica 5. Orden, actividad 1

Como se puede observar en la gráfica y tabla estadística, 10 grupos desarrollaron correctamente la actividad, de tal forma que se puede apreciar que tienen una buena comprensión de la posición de los números enteros en la recta numérica cuando tienen como referencia un número entero, además saben la orientación cuando se habla de derecha e izquierda en la recta numérica, asimismo, utilizan de forma adecuada las herramientas de Cabri II Plus.

De lo anterior, se aprecia que la mediación tecnológica sale a flote, puesto que la recta numérica construida en Cabri para la actividad, se convirtió en herramienta para encontrar cada respuesta, como también se observa la ayuda de la representación gráfica de la misma recta, dado que los grupos pudieron mirar en el molde de la recta los números enteros y contar dinámicamente espacios que los llevaron a la eficacia de sus respuestas, dando inconscientemente un paso de una representación gráfica a una

representación numérica en cada una de las respuestas, a la vez, el trabajo en grupo derivó el buen desarrollo de cada respuesta, dado que compartieron ideas tanto en el desarrollo grupal como en el desarrollo individual (socialización final), aludiendo de esta forma a la cognición situada.

Dentro de los grupos que contestaron correctamente, es el grupo 10 quien da una mejor utilización del ambiente de Cabri II Plus (*Ver figura 20*), ya que maneja la opción de insertar texto, nombrar los puntos de la recta numérica con los números enteros, además arrastran números en toda la pantalla, poniendo de manifiesto el gran dinamismo que posibilita dicho software.

Figura 20. Orden, respuesta grupo 10

a) ¿Cuál es el número entero que está dos unidades a la derecha de -5?	es el número -3
b) ¿Cuál es el número entero que está cinco unidades a la izquierda de 7?	es el número +2
c) ¿Cuál es el número entero que está nueve unidades a la izquierda de 3?	es el número -6
d) ¿Cuál es el número entero que está cuatro unidades a la derecha de 7?	es el número +11
e) ¿Cuál es el número entero que está tres unidades a la derecha de 0?	es el número +3
f) ¿Cuál es el número entero que está cinco unidades a la izquierda de 0?	es el número -5

Además, este grupo ubica de forma correcta los números enteros mediante las orientaciones derecha e izquierda en la recta numérica, teniendo como referencia un número entero. En la parte ortográfica tienen dificultades con la tilde de la palabra número, pero a la vez, presentan de forma adecuada el número entero.

Contrario a lo anterior, los grupos 4, 8 y 13 contestaron incorrectamente la actividad, en su desarrollo se observa la mala utilización que dieron de la recta presentada en el ambiente dinámico de Cabri II plus para dar sus respuestas, debido a ello, el grupo 8 tuvo una respuesta correcta de seis posibles, veamos:

Figura 21. Orden, respuesta grupo 8

a) ¿Cuál es el número entero que está dos unidades a la derecha de -5?	es el número +3 Incorrecto
b) ¿Cuál es el número entero que está cinco unidades a la izquierda de 7?	es el número -2 Incorrecto
c) ¿Cuál es el número entero que está nueve unidades a la izquierda de 3?	es el número -5 Incorrecto
d) ¿Cuál es el número entero que está cuatro unidades a la derecha de 7?	es el número -4 Incorrecto
e) ¿Cuál es el número entero que está tres unidades a la derecha de 0?	es el número +3 Correcto
f) ¿Cuál es el número entero que está cinco unidades a la izquierda de 0?	es el número 0 Incorrecto

Se evidencia que el grupo tiene dificultades con las orientaciones de derecha e izquierda cuando tienen como referencia un número entero en dicha recta, además presentan problemas al dar respuesta con las herramientas de Cabri II Plus y ortográficas al no colocar tilde a la palabra número.

Solo el grupo 14 contestó de forma incompleta la actividad, debido a que no acató las recomendaciones del profesor en el tiempo estipulado para el desarrollo de la actividad y le faltó tiempo para acabarla. Pero en esencia todos los grupos contestaron e hicieron el desarrollo de la actividad.

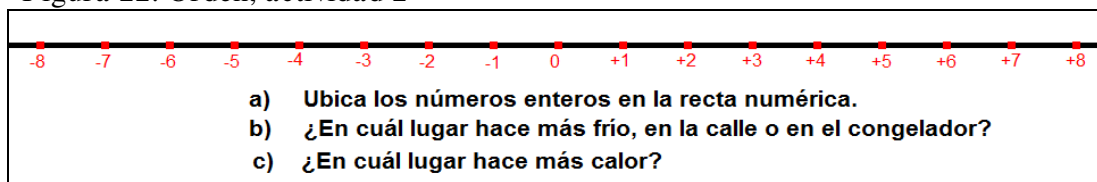
Ahora se pasa al análisis de la actividad número 2, la cual es presentada a continuación con una imagen del archivo de Cabri que fue entregado a los estudiantes:

2. (Archivo *Figura 2.Fig.*) Carlos está de vacaciones en la ciudad de Cuzco en Perú, en el día de ayer él midió la temperatura de la calle, la de su casa, la cual tiene calefacción y la del congelador de la nevera. Obteniendo los siguientes datos:

Lugar	Temperatura
Calle	-1°C
Casa	+11°C
Congelador	-9°C

- Ubicar los números enteros en la recta numérica
- ¿En cuál lugar hace más frío, en la calle o en el congelador?
- ¿En cuál lugar hace más calor? (Ver figura 22)

Figura 22. Orden, actividad 2



Con esta actividad se pretendía enseñar a los estudiantes la relación que hay entre los números enteros y las situaciones cotidianas; además, que comparasen los números enteros asociados a las temperaturas, con el fin de que observasen, cual es el número mayor o el número menor en dicho contexto.

Para su desarrollo nuevamente se siguió el orden estipulado para todas las actividades de la investigación, por lo cual se entregó la guía a los catorce grupos de estudiantes, recomendando que la lean en silencio dando un tiempo prudente para dicho fin, posteriormente se leyó en voz alta, al final de la lectura se explicó el enunciado de la actividad, y se dijo que se trataba de comparar las temperaturas de una calle, de una casa y un refrigerador en la ciudad de Cuzco, utilizando la recta numérica dinámica de Cabri II Plus adjuntada en un archivo en cada computador.

Al terminar la explicación se escuchó dudas de los grupos, siendo una de las más importantes la realizada por el grupo 3, el cual preguntó:

¿Cómo se hace para saber en los negativos cual número es mayor?

A lo que se respondió:

“En la recta numérica, un entero es mayor que otro si se encuentra a la derecha de tal número y esto se cumple para cualquier par de enteros ya sean positivos, negativos o de signos contrarios”.

Luego se pidió a cada grupo que abrieran el archivo de Cabri II Plus requerido para la ejecución de la actividad, dándoles 40 minutos para su desarrollo. En el transcurso de este tiempo se observó que la actividad no presentó mayores dificultades para la mayoría de los grupos, ya que utilizaron de forma apropiada la recta numérica y además, por sentido común tenían facilidad en comparar las temperaturas de los objetos y lugares.

Transcurridos los 40 minutos se pidió que guardaran el archivo y que prestaran atención, debido a que comenzaba la socialización de la actividad. Se pidió a un representante del grupo 11 que salga adelante y comparta el desarrollo con todos sus compañeros de la siguiente pregunta:

¿En cuál lugar hace más frío, en la calle o en el congelador?

El estudiante, primeramente ubicó el número entero asociado a la temperatura de la calle en la recta numérica en Cabri II plus y luego el número entero asociado a la temperatura del congelador en la misma recta, a continuación concluyó que hacía más frío en el congelador, ya que está a la izquierda de la otra temperatura y además, agregó que el congelador es más frío que la calle. Luego se realizó dos preguntas abiertas para todo el grupo:

¿Es correcto el desarrollo y la afirmación hecha por su compañero?, ¿Sí o no?, ¿Por qué?

Una estudiante del grupo 12 responde:

“Profe, es correcto lo que hizo mi compañero, ya que el entero -1 es mayor que el entero -9 por la razón de que -1 está a la derecha de -9, asegurando al final que el lugar más frío era el congelador”.

Inmediatamente se afirmó que la respuesta hecha por la estudiante del grupo 12 era correcta.

Para la siguiente pregunta se llamó a un integrante del grupo 5, el cual tampoco presento inconvenientes en el desarrollo de la siguiente pregunta:

¿En cuál lugar hace más calor?

Al igual que el primer estudiante, comenzó ubicando los enteros que representaban las temperaturas, luego miró que el número que estaba más a la derecha era el +11 por lo cual concluyó que el lugar más caliente era la casa, afirmación que era correcta. Luego se explicó a todo el grupo que se estaban comparando tres números enteros, de los cuales uno era positivo y los demás negativos, y siempre que suceda esto, va a ser mayor el número positivo (que en la actividad correspondía a la temperatura de la casa).

Con lo anterior se dio por culminada esta sesión y se procedió a guardar el desarrollo de las actividades hechas en este día por los catorce grupos. A continuación se presentan los resultados obtenidos en el análisis:

Resultados de la segunda actividad de orden en los Números Enteros

Tabla 7. Orden, actividad 2

Segunda actividad	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Correctas	10	71,43%
Incorrectas	2	14,28%
Incompletas	0	0,00%
En Blanco	2	14,28%
Total Grupos	14	100,00%

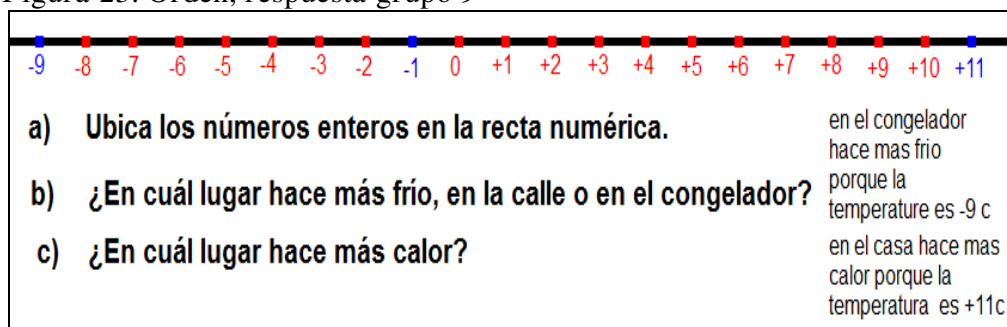
Gráfica 6. Orden, actividad 2

10 grupos contestaron correctamente la actividad, en su desarrollo se observa que al estar contextualizados los números enteros con la temperatura usual de los objetos en relación, el trabajo y la comprensión del orden en los números enteros se facilita, además utilizan de forma adecuada herramientas de Cabri II Plus, como son: el nombrar los puntos que representan los enteros en la recta numérica, el arrastre de los números enteros para mejor ubicación en el ambiente dinámico de Cabri, el texto para dar su respuesta.

Lo anterior permite contemplar la mediación tecnológica en la actividad, dado que Cabri II Plus ofrece herramientas para que el estudiante pueda llegar a las respuestas apropiadas; asimismo, se observa el cambio de representaciones, primeramente, se presenta una representación verbal (situación cotidiana), la cual será transformada por los estudiantes en una representación gráfica y cuando hayan llegado a la respuesta culminaran con una representación numérica, igualmente, como se dio en la primera actividad, el trabajo en grupo garantizó la puesta en funcionamiento de la cognición situada y por tratarse de una actividad contextualizada, aparece en esencia la resolución de problemas necesaria para la enseñanza matemática.

Dentro de los grupos que desarrollaron correctamente la actividad está el grupo 9 (Ver figura 23), en su desarrollo se observa que comprende que al comparar dos números enteros con signo negativo, es menor el que está ubicado más lejos del número cero en la parte izquierda de la recta numérica.

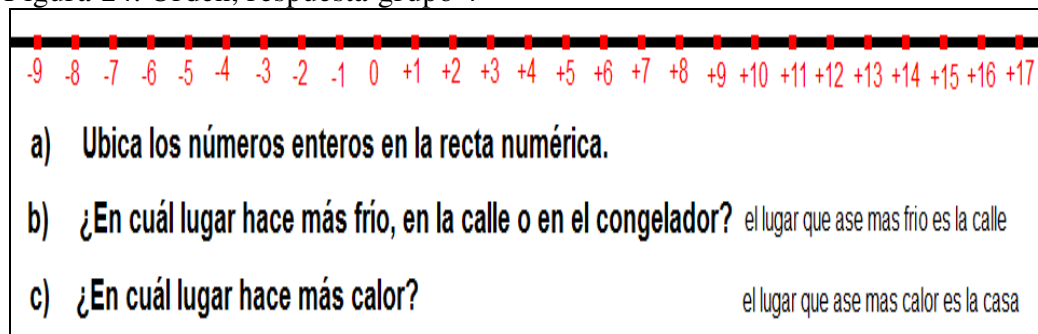
Figura 23. Orden, respuesta grupo 9



Los integrantes del grupo, emplean el sentido común al comparar los números enteros, ya que los objetos son cotidianos y las temperaturas son similares a las verdaderas. En cuanto al manejo de Cabri, el grupo utiliza correctamente la herramienta de numerar puntos en la recta numérica asociados a las temperaturas de los objetos, inserta texto en el ambiente dinámico de Cabri de forma correcta y guarda el archivo sin ningún inconveniente. En lo que tiene que ver con lo ortográfico presenta dificultades con la tilde de algunas palabras.

De los 14 grupos, dos de ellos contestaron de forma incorrecta, a continuación se presenta gráficamente las respuestas dadas por el grupo 4:

Figura 24. Orden, respuesta grupo 4



Este grupo no comprende como comparar dos números negativos con ayuda de la recta numérica de Cabri, ya que realizan la comparación como si se tratara de dos números enteros positivos, además no aprecian la relación contextual que tienen los números enteros con la temperatura, dando respuestas sin sentido entre los objetos. Igualmente presenta errores ortográficos al dar la respuesta con la opción insertar texto de Cabri.

12 grupos contestaron de forma completa la actividad; el grupo 1 y el grupo 13 presentaron en blanco su desarrollo, en el primer caso por no haber guardado el archivo y en el segundo caso por la no asistencia de las dos estudiantes que conformaban el grupo.

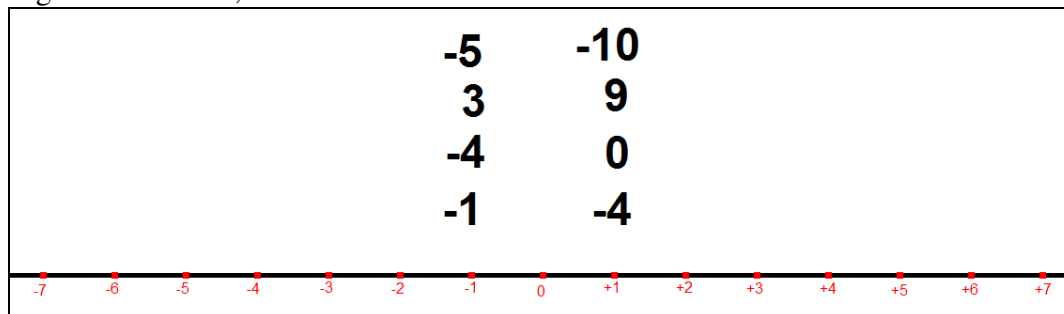
Con lo anterior se da por culminado el análisis de la actividad 2 y se pasa a la tercera y última actividad de orden en los números enteros, la cual es presentada a continuación con una imagen del archivo de Cabri entregado a los estudiantes:

3. (Archivo Figura 3.Fig.) Con la ayuda de la recta numérica, escribir los signos $>$ o $<$ entre cada par de números según corresponda.

- a) -5 ____ -10
- b) $+3$ ____ $+9$
- c) -4 ____ 0
- d) -1 ____ -4

(Ver figura 25)

Figura 25. Orden, actividad 3



Con ella se pretendía que los estudiantes refuercen el orden de los números enteros con la utilización de la recta numérica en Cabri al comparar dos de estos números. Asimismo se pretendía que los estudiantes aprendan las relaciones mayor que ($>$) y menor que ($<$) entre dos números enteros cualesquiera, como también, sus respectivos símbolos.

Esta actividad se desarrolló de la siguiente manera, primero se entregó la guía a los estudiantes para que la leyeran en silencio, la entendieran en un tiempo prudente; luego se pasó a la explicación, en la cual, se dijo que la actividad consistía en comparar dos números ayudados por la recta numérica y que debían colocar en medio de esos números, los símbolos $>$ (mayor que) y $<$ (menor que) dependiendo de los números.

Los estudiantes no tuvieron preguntas con relación a la actividad explicada e inmediatamente se ordenó a todos los grupos abrir el archivo de Cabri II plus, guardado con anticipación en cada ordenador. Dado que los archivos estaban guardados ordenadamente ningún grupo presentó inconvenientes en encontrarlo y abrirlo, iniciando así la actividad que se desarrollaría en 40 minutos, además se recomendó que guardaran sus avances, esto para evitar inconvenientes con sus trabajos.

En el transcurso de este tiempo, todos los grupos preguntaron cómo insertar los símbolos $>$ y $<$ con el teclado del computador, ya que no sabían cómo hacerlo, de tal forma que al mirar el inconveniente que tenían, primeramente se dio la explicación de forma general de como insertar estos símbolos y luego al mirar que no era muy comprendido por unos grupos se pasó por cada uno de ellos explicando en el teclado la combinación para dichos caracteres.

Posteriormente se observó el desarrollo que hacían los grupos de la actividad, dándose cuenta de que algunos grupos tenían dificultades al diferenciar los signos mayor y menor que, con lo cual daban a entender que no estuvieron atentos a la explicación inicial de la actividad.

Todos los grupos al terminar el tiempo dado acabaron con la actividad, es así que enseguida se tomó la palabra y se pidió atención a todos los grupos dando por culminado la etapa de desarrollo de la actividad e inicio de la etapa de socialización, en la cual, se llamó a un estudiante del grupo 10 para que realizara los dos primeros ejercicios de la actividad, el estudiante inicialmente puso los números enteros en la recta numérica, utilizando para ello la opción de nombrar puntos y luego los comparó recurriendo a la explicación inicial:

“Como el -5 está a la derecha del -10 es mayor”

Aunque dudó un poco al momento de poner el símbolo de mayor que ($>$), el desarrollo fue correcto. En cuanto al otro ejercicio, el estudiante no tuvo dificultades para realizarlo, puesto que se trataba de dos números enteros positivos familiares para él.

A continuación, un representante del grupo 5 desarrolló los dos ejercicios que quedaban, igualmente, primero ubicó el par de números enteros en la recta numérica y luego puso el símbolo; en esta instancia cometió un error, ya que se equivocó de símbolo y concluyó que -4 era mayor que 0, entonces, se preguntó a todo el salón si el desarrollo presentado por el estudiante estaba correcto, obteniendo respuestas como:

Grupo 4: *“Profe, el desarrollo hecho por mi compañero está mal, ya que el 0 es mayor que -4, ya que el número cero es mayor que todos los números negativos”*

Grupo 10: *“Profe la respuesta está mal, ya que cualquier número negativo es menor que 0”*

Grupo 4: *“Profe, está mal, ya que el 0 está a la derecha de -4, entonces 0 es mayor que -4”*

De las respuestas dadas, cabe resaltar que habían grupos que comenzaban a afirmar cosas que no se les había explicado, pero que por alguna razón ya conocían, como afirmar que todo número negativo es menor que 0 o que 0 es mayor que todo número negativo. Para finalizar las intervenciones de los estudiantes se pidió a un representante del grupo 10 realizar el último ejercicio, el cual lo desarrolló correctamente. Posteriormente se realizó una socialización general de todo el trabajo hecho y se dio por culminada la tercera actividad.

Luego se procedió a guardar todos los desarrollos hechos por los 14 grupos con el fin de ser analizados, obteniéndose los siguientes resultados:

Resultados de la tercera actividad de orden en los Números Enteros

Tabla 8. Orden. actividad 3

Tercera actividad	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Correctas	10	71,43%
Incorrectas	4	28,57%
Incompletas	0	0,00%
En Blanco	0	0,00%
Total Grupos	14	100,00%

Gráfica 7. Orden. actividad 3

Todos los grupos contestaron de forma completa la actividad y ningún grupo presentó inconvenientes con el respectivo computador en el desarrollo de la misma. 10 grupos realizaron de forma correcta la actividad, se observa en su desarrollo que utilizan apropiadamente la recta numérica al comparar cualquier par de números enteros, dando conclusiones verdaderas sobre cual número es mayor o menor; igualmente, escriben y diferencian adecuadamente los símbolos mayor que ($>$) y menor que ($<$) entre dos números enteros ya sean positivos, negativos o de signo contrario. Por otro lado, dan un buen uso de las herramientas de Cabri II Plus, dado que utilizan la opción insertar texto para dar respuesta a cada una de las comparaciones, a la vez que pusieron en la recta numérica los números enteros mediante la opción de nombrar y el arrastre con el cursor del ordenador.

Cabe señalar que en las anteriores actividades el ambiente dinámico de Cabri II plus se convirtió en un mediador tecnológico para los estudiantes en la búsqueda de la respuesta, ya que trabajaron en primera instancia, la representación gráfica con la recta numérica y en segunda instancia la representación numérica con los números enteros y los símbolos de comparación.

A continuación se presenta las respuestas dadas por el grupo 4.

Figura 26. Orden, respuesta grupo 4

-5	>	-10
3	<	9
-4	<	0
-1	>	-4

En su desarrollo se aprecia que comprendió la finalidad de la actividad al utilizar de forma correcta la recta numérica y al comparar sin dificultades la posición de los dos números enteros relacionados en cada ejercicio, como también utilizan de forma apropiada los símbolos mayor que (>) y menor que (<), lo cual se puede apreciar en la anterior figura.

Cuatro grupos contestaron de forma inapropiada, se observa en sus archivos que no utilizan correctamente la recta numérica construida en Cabri, dado que presentaron problemas en la ubicación y orientación de los números enteros, además, tienen dificultades con los símbolos mayor que (>) y menor que (<), al no saber diferenciarlos con claridad para realizar la comparación entre estos números. Un ejemplo es el grupo 5, quien realiza la comparación entre números enteros basándose en la cantidad numérica, mas no en su posición, mostrando el no entendimiento de la actividad planteada. A continuación su desarrollo:

Figura 27. Orden, respuesta grupo 5

-5	<	-10	Incorrecto
3	>	9	Incorrecto
-4	>	0	Incorrecto
-1	<	-4	Incorrecto

De esta forma se dio por terminado la puesta en práctica de las actividades de orden en los números enteros y se pasó a las de valor absoluto, las cuales se describen enseguida.

4.4 ACTIVIDADES DE VALOR ABSOLUTO EN LOS NÚMEROS ENTEROS

Este tema se lo trabajó con tres actividades, las cuales se estructuraron teniendo en cuenta la recta numérica y el ambiente dinámico de Cabri II Plus, además se recurrió al modelo de desplazamiento en la recta numérica, puesto que el propósito general de dichas actividades, era comprender al valor absoluto como el tamaño del vector asociado a un número entero.

Las actividades fueron contextualizadas con acontecimientos cotidianos para el estudiante, en las que puedan utilizar el modelo de desplazamiento y la recta numérica para dar solución a cada una de ellas. A continuación se presenta una breve descripción de cada actividad y el enunciado que se entregó a los grupos de estudiantes en el momento de su desarrollo.

La primera actividad consistía en desarrollar un problema con ayuda de vectores y de la representación en la recta numérica sobre el desplazamiento realizado por una coneja; el fin de la actividad fue contextualizar y enseñar al estudiante que el valor absoluto del número entero asociado a cada desplazamiento es la distancia del vector representado en la recta numérica. La actividad a desarrollar por parte de los estudiantes y la imagen del archivo de Cabri entregado a los mismos se presenta a continuación:

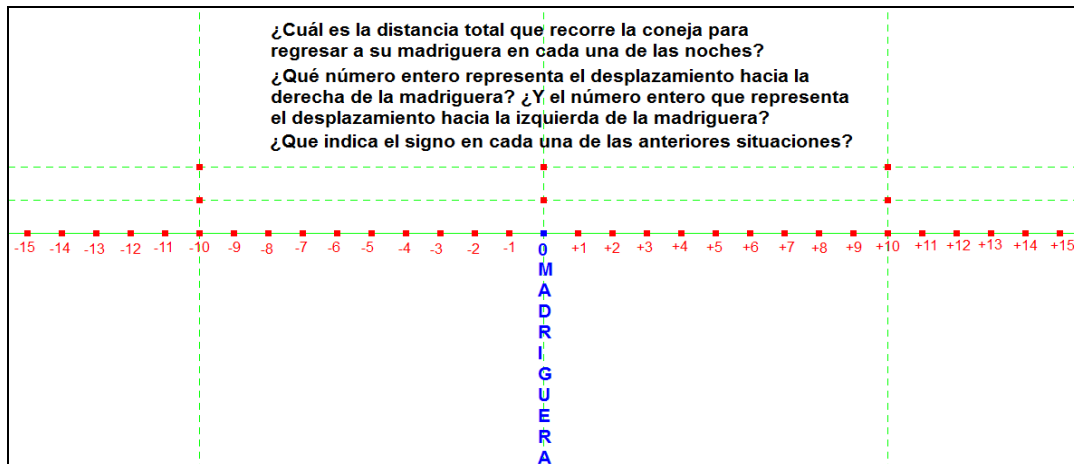
1. (*Archivo Figura 1.Fig.*) Una coneja se desplace en la noche 10m a la derecha de su madriguera y a la noche siguiente nuevamente 10m pero ahora hacia la izquierda de su madriguera.

¿Cuál es la distancia total que recorre la coneja para regresar a su madriguera en cada una de las noches?

¿Qué número entero representa el desplazamiento hacia la derecha de la madriguera? ¿Y el número entero que representa el desplazamiento hacia la izquierda de la madriguera?

¿Que indica el signo en cada una de las anteriores situaciones?, (*Ver figura 28*)

Figura 28. Valor absoluto, actividad 1



La primera actividad comenzó con la entrega de la guía de trabajo a cada uno de los grupos, como también la orientación de la búsqueda de la carpeta valor absoluto en cada computador. Posteriormente se hizo la lectura de la actividad, culminando con la interpretación y explicación a todo el salón de dicha actividad. Luego se preguntó a los estudiantes si tenían inquietudes sobre la misma, a lo cual respondieron que no, dando así inicio al desarrollo de la actividad.

En el transcurso de este tiempo se observó que la representación en la recta numérica de los movimientos de la coneja en las dos noches mediante vectores era el correcto, pero se miró problemas al dar la primera respuesta por parte de la mayoría de grupos, ya que interpretaron a los dos movimientos de la coneja como un solo en el sentido de distancia y dieron mal la respuesta.

Visto lo anterior, los integrantes de esta investigación propusieron un ejemplo sencillo como ayuda para el desarrollo de dicha actividad, el cual fue:

“Cada estudiante cierre los ojos e imagínese caminando de la escuela a la iglesia del corregimiento, ahora, regresen nuevamente a la escuela contando los pasos que dieron en su caminata”.

Luego se invitó a todos los grupos que regresaran a la actividad y la respondieran teniendo en cuenta el ejemplo realizado. De esta forma se ayudó a que muchos grupos se dieran cuenta del error que estaban cometiendo. Es pertinente aclarar que solo se dio una pauta para la realización de la actividad con el ejemplo, más no se realizó la actividad por parte de los investigadores.

Con la anterior aclaración algunos grupos corrigieron su actividad y otros siguieron con el desarrollo que habían hecho hasta ese instante. Ya cumplido el tiempo dado para realizar la actividad, se pasó a la socialización, de tal forma que se llamó a un representante del grupo 8 para que pase al frente y comparta con sus compañeros el trabajo que había realizado su grupo respecto a la primera pregunta:

¿Cuál es la distancia total que recorre la coneja hasta regresar a su madriguera?

El estudiante ubicó primeramente los números hasta donde llegaban cada movimiento de la coneja y posteriormente los representó de tal forma que se dio cuenta de que la coneja al final de los movimientos quedaba justo en su madriguera, la respuesta de este estudiante fue errónea ya que aseguró que la coneja había recorrido 10m de distancia, con lo cual uno de los investigadores intervino y explicó que la coneja había dado un primer movimiento que era de 10m y que luego recorrió otros 10m en su segundo movimiento, entonces, como fueron dos movimientos se tendría que realizar una adición, que para el caso, se trataba de sumar 10m más 10m y con ello se obtenía que la coneja para llegar a su madriguera recorrió 20m.

Posteriormente se llamó al frente a una estudiante que formaba parte del grupo 12 para que comparta el desarrollo de la siguiente pregunta, cuyo enunciado era el siguiente:

¿Qué número entero representa el desplazamiento hacia la derecha de la madriguera? ¿Y el número entero que representa el desplazamiento hacia la izquierda de la madriguera?

Para dar respuesta la estudiante miró con detenimiento la construcción correcta de los dos vectores representados en la recta numérica, a la vez posicionó sus manos relacionando la mano derecha con el sentido derecho de la recta numérica y con la otra mano el otro sentido, de tal forma que contesto:

“El número entero que representa en la recta numérica al primer movimiento es el número +10 y al otro movimiento lo representa el -10”

Con lo cual, uno de los investigadores afirmó que la forma de resolver las preguntas como sus respuestas eran correctas.

Continuando con la socialización, se llamó a un estudiante del grupo 1 para que pase al frente a dar respuesta a la tercera pregunta de la actividad en cuestión. La pregunta era la siguiente:

¿Que indica el signo en cada una de las anteriores situaciones?

El estudiante respondió:

“Indica los movimientos de la coneja tanto al lado izquierdo como al lado derecho dados en las dos noches por la misma coneja”

Esta respuesta fue tomada como correcta, y se explicó a todos los grupos que el fin de la recta numérica, era la de ayudar a enlazar los problemas cotidianos de las personas con los números enteros y a la vez ayudar a darles solución.

Antes de finalizar con la primera actividad se complementó diciendo que los números negativos estaban representados en la recta numérica por vectores cuya cabeza de flecha apuntaba hacia la izquierda y que los números positivos estaban representados por vectores cuya cabeza de flecha estaban apuntando hacia la derecha. De esta forma se daba por terminado la etapa de socialización y asimismo la sesión del día, de tal forma que se ordenó a los estudiantes dejar los computadores encendidos para grabar el desarrollo hecho por ellos. Una vez analizado y organizado todo el trabajo se obtuvieron los siguientes resultados:

Resultados de la primera actividad de valor absoluto en los Números Enteros

Tabla 9. Valor absoluto. actividad 1

Primera actividad	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Correctas	11	78,58%
Incorrectas	3	21,43%
Incompletas	0	0,00%
En Blanco	0	0,00%
Total Grupos	14	100,00%

Gráfica 8. Valor absoluto. actividad 1

De la tabla se concluye que todos los grupos desarrollaron de forma completa su trabajo y que 11 de ellos lo hicieron de forma correcta, por lo cual, se puede afirmar que llegaron al propósito de la actividad, al interpretar acertadamente el valor absoluto de los números enteros asociados a los movimientos de la coneja como una distancia, además, comprenden de manera adecuada el problema y utilizan de forma apropiada las herramientas de Cabri II Plus al hacer las construcciones de los vectores y al dar respuesta a los interrogantes de la actividad.

Entre los grupos que tuvieron un buen desarrollo está el grupo 12, el cual, interpreta correctamente el problema, ya que al tratarse de desplazamientos

relaciona el valor absoluto con la distancia recorrida por la coneja; además, comprende la diferencia que hay entre un número entero negativo y su valor absoluto y le da un buen uso al ambiente de geometría dinámica de Cabri II Plus al construir los vectores asociados a los desplazamientos requeridos para el desarrollo del problema. Cabe resaltar que este grupo también diferencia el desplazamiento de un objeto y la distancia recorrida por el mismo. A continuación se presenta gráficamente su desarrollo:

Figura 29. Valor absoluto, respuesta grupo 12

¿Cuál es la distancia total que recorre la coneja para regresar a su madriguera en cada una de las noches?	la coneja recorre en cada noche 10mts y en 2 noches 20mts
¿Qué número entero representa el desplazamiento hacia la derecha de la madriguera? ¿Y el número entero que representa el desplazamiento hacia la izquierda de la madriguera?	el número entero que representa a la derecha es +10 y hacia la izquierda -10
¿Que indica el signo en cada una de las anteriores situaciones?	el signo indica izquierda y derecha

Tres grupos contestaron incorrectamente, en el análisis se observó que estos grupos no interpretaron el problema de forma adecuada y por consiguiente representaron de forma errónea los desplazamientos requeridos en el desarrollo del problema; además, presentaron problemas con la recta numérica, al argumentar que el signo de los números enteros que representaban a los movimientos eran los mismos. A continuación se presenta el desarrollo del grupo 13:

Figura 30. Valor absoluto, respuesta grupo 13

¿Cuál es la distancia total que recorre la coneja para regresar a su madriguera en cada una de las noches?	la distancia total que recorre la conejilla es de o a mas 10
¿Qué número entero representa el desplazamiento hacia la derecha de la madriguera? ¿Y el número entero que representa el desplazamiento hacia la izquierda de la madriguera?	del lado izquierdo es de menos 10
¿Que indica el signo en cada una de las anteriores situaciones?	

Se observa que el grupo no comprendió el enunciado de la actividad, interpretó los desplazamientos de la coneja por separado y no sumó al final sus valores absolutos; además, no respondió la tercera pregunta, demostrando que no comprenden las orientaciones que tienen los signos de

los números enteros en la recta numérica. Con lo anterior se da por culminado el análisis de la actividad 1 y se pasa al de la actividad 2.

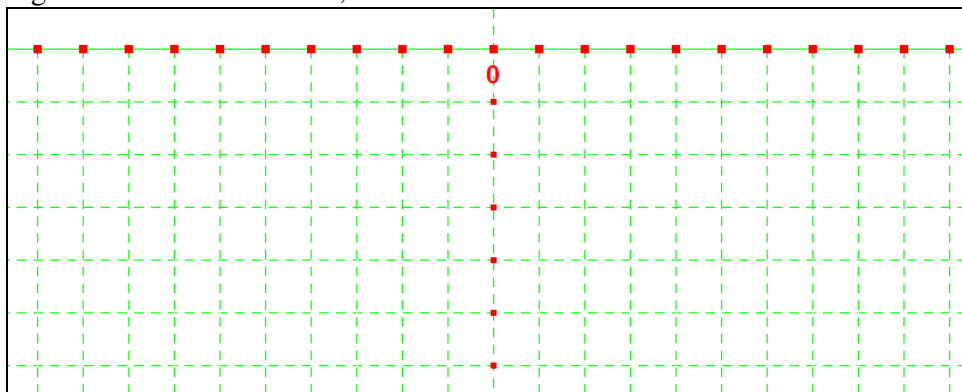
La segunda actividad consistió en representar números enteros en la recta numérica de Cabri II Plus y hallar el valor absoluto de cada número. La finalidad de la actividad fue similar a la anterior, dado que el estudiante debía interpretar al valor absoluto del número entero representado como una distancia. La actividad a desarrollar por parte de los estudiantes y la imagen del archivo de Cabri entregado a los mismos se presenta a continuación:

2. (Archivo *Figura 2.Fig.*) Ubicar los siguientes números enteros, representarlos por un vector y nombrar cada vector con su respectivo valor absoluto:

- a) -9
- b) $+7$
- c) -12
- d) $+3$
- e) -11
- f) $+13$

(Ver figura 31)

Figura 31. Valor absoluto, actividad 2



La presente actividad se resolvió de la siguiente manera: primero se entregó la guía para que la leyeran grupalmente y en voz baja, luego, se leyó en voz alta para todo el salón y se explicó que la actividad consistía en representar en la recta numérica los números enteros que aparecían escritos en la guía, calculando de cada uno de los números enteros su valor absoluto. Culminado lo anterior, se pasó a la etapa de desarrollo de dicha actividad, la cual contó con un tiempo de 40 minutos.

En esta etapa se miró que la mayoría de grupos no tenían problemas e inconscientemente supieron diferenciar el valor absoluto del símbolo que

representaba el número entero, ya sea negativo o positivo. Lo anterior demostraba que la actividad precedente había quedado clara y por ello los estudiantes se demoraron 10 minutos menos del tiempo que se había dado en un principio.

La etapa de socialización empezó con un representante del grupo 7, al cual se le pidió que desarrolle toda la actividad. El estudiante representó mediante vectores cada número entero, posteriormente a ello colocó debajo de cada representación las iniciales VA y el valor absoluto de cada número de forma correcta. Finalizada la intervención del estudiante, uno de los investigadores complementó dicha actividad afirmando que el valor absoluto de un número entero se trataba del mismo número pero sin signo, es decir, el valor absoluto de un entero siempre va a ser positivo, puesto que éste, representaba una distancia. Con lo anterior se dio por terminada la socialización y con ello la actividad.

A continuación se presenta la información obtenida del análisis hecho a los desarrollos de los grupos:

Resultados de la segunda actividad de valor absoluto en los Números Enteros

Tabla 10. Valor absoluto. actividad 2

Segunda actividad	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Correctas	12	85,72%
Incorrectas	2	14,28%
Incompletas	0	0,00%
En Blanco	0	0,00%
Total Grupos	14	100,00%

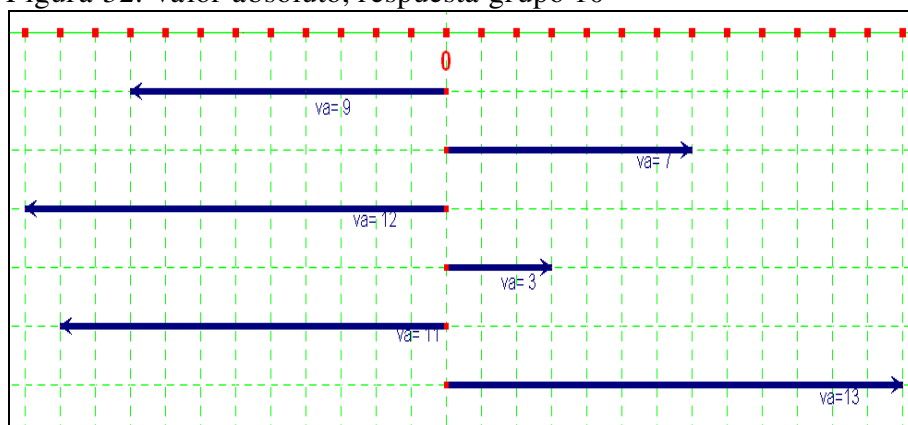
Gráfica 9. Valor absoluto. actividad 2

Todos los grupos desarrollaron la actividad y ninguno de ellos presentó inconvenientes con su respectivo computador, 12 grupos realizaron correctamente la actividad, se observa que pueden representar correctamente el vector asociado al número entero en la recta numérica; además, le dan un buen uso a la cuadrícula presentada en el ambiente dinámico de Cabri II Plus para representar cada número entero y obtener el valor absoluto del mismo; asimismo, usan adecuadamente todas las

herramientas del software necesarias para las construcciones y respuestas pedidas por la actividad.

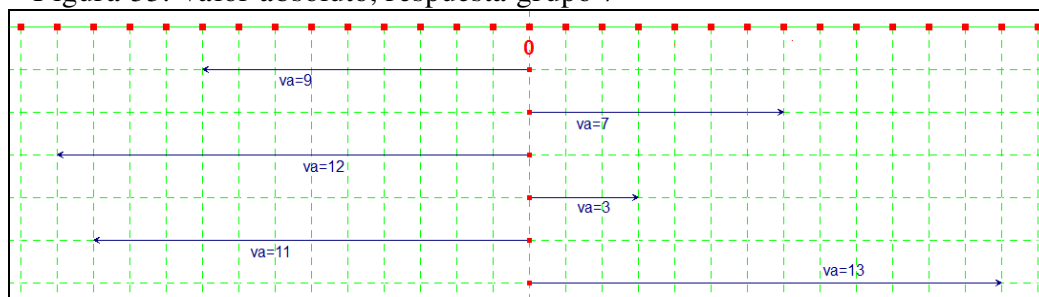
El grupo 10 representó acertadamente los números enteros mediante vectores y obtuvo los valores absolutos de los mismos; igualmente, concluye que la distancia total del vector viene dada por el valor absoluto de cada número entero. Cabe resaltar que en el ambiente de Cabri los grupos podían aumentar o disminuir el tamaño de los espacios y de la cuadrícula, pero ello no cambiaba para nada la respuesta, poniendo de manifiesto la ejecutabilidad de las representaciones semióticas. A continuación se muestra gráficamente el desarrollo del grupo mencionado.

Figura 32. Valor absoluto, respuesta grupo 10



Dos grupos desarrollaron incorrectamente la actividad, se observó que el problema fue el mal conteo de los puntos que representaban a los números enteros. A continuación se presenta el desarrollo del grupo 7, el cual en vez de representar un vector de 12 unidades de longitud, dibuja uno de 13 unidades de longitud, asimismo con el vector de 11 unidades de longitud, (Ver figura 33). Cabe resaltar que algunos de los vectores están incorrectos longitudinalmente pero en cuanto a sus direcciones, todos los vectores se encuentran bien contruidos, entonces, se podría decir que el error fue más por descuido o por falta de concentración en el desarrollo de la actividad.

Figura 33. Valor absoluto, respuesta grupo 7

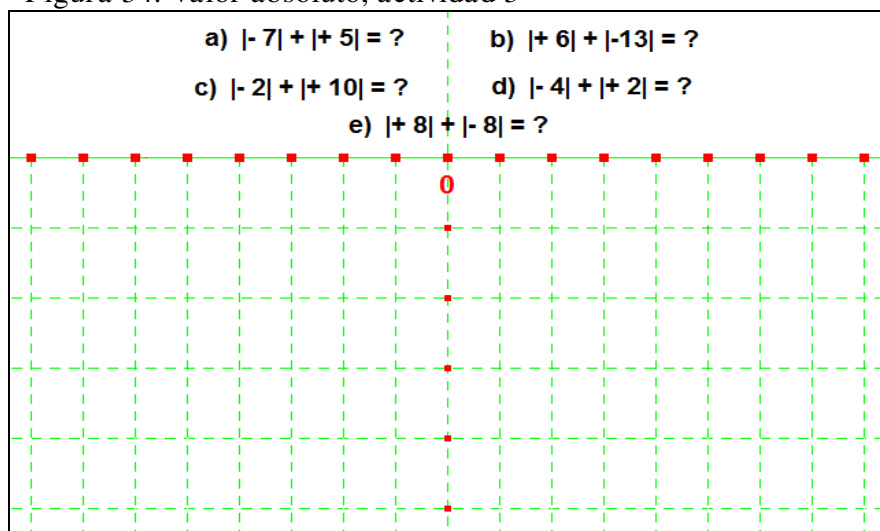


Con lo anterior se da por culminado el análisis de la actividad 2 y pasamos a la tercera actividad, la cual, consistía en ubicar un par de números enteros en la recta numérica y calcular la distancia que hay entre los dos, nuevamente el fin de la actividad se encerró en encontrar e interpretar, mediante el modelo de desplazamiento, al valor absoluto como una distancia. Además, otro de los objetivos primordiales era preparar a los estudiantes para afrontar el siguiente tema (Adición y sustracción), puesto que esta actividad facilitaba el aprendizaje del mismo. La actividad a desarrollar por parte de los estudiantes y la imagen del archivo de Cabri entregado a los mismos se presenta a continuación:

3. (Archivo *Figura 3.Fig.*) Ubicar los siguientes números enteros y calcular la distancia que los separa, representando la distancia con un vector y un número:

- a) -7 y $+5$
 - b) $+6$ y -13
 - c) -2 y $+10$
 - d) -4 y $+2$
 - e) $+8$ y -8
- (Ver figura 34)

Figura 34. Valor absoluto, actividad 3



El desarrollo de la presente actividad fue de la siguiente manera: Primeramente, se les pidió que continuaran con la rotación de estudiantes para el manejo del computador, luego de observar que ya estaban en orden se les entregó la guía de la actividad recomendándoles a la vez que la leyeran en grupo en forma pausada, posteriormente se pidió atención a los estudiantes y se leyó la guía en voz alta, explicándoles a la vez de lo que trataba la actividad.

“La actividad consiste en representar sobre una misma línea los dos números que se dan en cada ejercicio, luego de ello encontrar el valor absoluto de estos números por separado y por último realizar la suma de los dos valores absolutos en cuestión. Todo deberá hacerse tomando como base la recta presentada en el archivo adjunto”

Al igual que el resto de las actividades, el tiempo de desarrollo era de 30 minutos. Durante este tiempo se observó que la mayoría de grupos no tuvo inconvenientes para la representación de los números enteros en una misma recta, hubo dificultades al tiempo de encontrar los valores absolutos y operar, dado que les parecía complicado mirar la expresión matemática de la suma de dos números enteros, debido a ello, se les hizo nuevamente el comentario que el valor absoluto de un número entero es una distancia, más puntualmente la distancia que hay de cero hasta el número entero representado, luego de ello, unos grupos comprendieron el mensaje y se dieron cuenta de que tenían que hacer una suma.

Terminado el tiempo estipulado, se pidió atención a los estudiantes, ya que se iba a iniciar la socialización de dicha actividad. Se empezó llamando a un estudiante del grupo 11, el cual, representó en la recta numérica el par de números enteros del primer ejercicio correctamente y calculó los valores absolutos por separado de cada número, para al final sumarlos y obtener el resultado de la expresión numérica: $|-7|+|+5|= 12$. Posteriormente se argumentó que el desarrollo estaba correcto.

Luego se pidió la ayuda de un representante del grupo 1 para desarrollar el segundo ejercicio, quien desarrollo correctamente el ejercicio. Cuando el estudiante finalizó su intervención, un estudiante del grupo 9 hizo una afirmación:

“Profe, todos los ejercicios son lo mismo, entonces para todos se tendrá que hacer lo mismo. Está muy fácil”

A lo que todo el salón afirmó que era cierto. Dado que se observó que todos los grupos desarrollaron la actividad de forma correcta no se hizo más intervenciones, finalizando así la puesta en práctica de las tres actividades del valor absoluto de un número entero en la investigación.

Posteriormente se hizo el análisis respectivo del desarrollo de los estudiantes obteniendo los siguientes resultados:

Resultados de la tercera actividad de valor absoluto en los Números Enteros

Tabla 11. Valor absoluto, actividad 3

Tercera actividad	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Correctas	12	85,72%
Incorrectas	0	0,00%
Incompletas	2	14,28%
En Blanco	0	0,00%
Total Grupos	14	100,00%

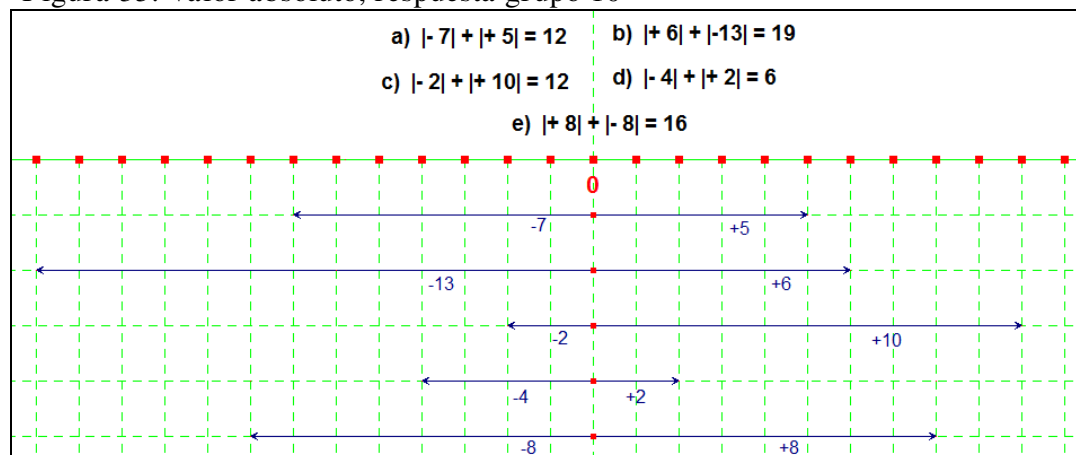
Gráfica 10. Valor absoluto, actividad 3

En esta actividad dos grupos presentaron su trabajo incompleto, muy probablemente porque no acataron la recomendación de ir guardando sus avances o porque les faltó tiempo para realizarla en su totalidad, pero en el desarrollo alcanzado, se observó que los dos grupos habían comprendido la actividad.

Respecto al resto de grupos, su desarrollo lo hicieron apropiadamente, lo cual demuestra que comprenden al valor absoluto de un número entero como el tamaño de los vectores representados en la recta numérica; además, realizan de forma correcta la suma de los valores absolutos de dos números enteros con igual signo y distinto signo. Por otro lado, se observó que todos los grupos utilizaban el método del conteo de espacios en la recta numérica para resolver los ejercicios, como también emplean las herramientas que les brinda Cabri II Plus para realizar las construcciones de vectores con su respectivo nombre y grosor.

A continuación se presenta el archivo del grupo 10, el cual, representa de forma correcta cada número entero en la recta numérica; interpreta la suma de los valores absolutos de los dos números enteros pedidos en cada ítem de la actividad, como la distancia de un número entero a otro, ayudándose de la cuadrícula dada en el ambiente dinámico de Cabri II Plus:

Figura 35. Valor absoluto, respuesta grupo 10



Para resumir se diría que el objetivo de la tercera actividad fue alcanzado satisfactoriamente, puesto que al finalizar ésta, los estudiantes ya comprendían que el valor absoluto de un número entero siempre era positivo y que este valor constituía una longitud, la cual podía representarse mediante un vector en la recta numérica. Igualmente, este trabajo preparaba a los estudiantes para facilitar el desarrollo de la actividad 4, la cual consistía en la adición y sustracción de números enteros y de la que se hablará enseguida.

4.5 ACTIVIDADES DE ADICIÓN EN LOS NÚMEROS ENTEROS

Para su desarrollo se recurrió a la metodología utilizada desde un inicio en la investigación (en cuyo momento ya era familiar para todos los estudiantes), comenzando con dos actividades de adición de números enteros, las cuales fueron diseñadas empleando el modelo concreto de desplazamiento en la recta numérica y Cabri II Plus; para ello se recurrió a problemas con situaciones y contextos de la vida real, en donde los estudiantes puedan asociar desplazamientos reales de personas con vectores dinámicos en la recta numérica inscrita en Cabri.

Se inició la enseñanza de la adición de números enteros con una actividad, la cual constaba a su vez de dos sub-actividades, las cuales estaban relacionadas con los movimientos de Ricardo y Diego en la calle de su ciudad frente a su casa.

Primera sub-actividad: ADICIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

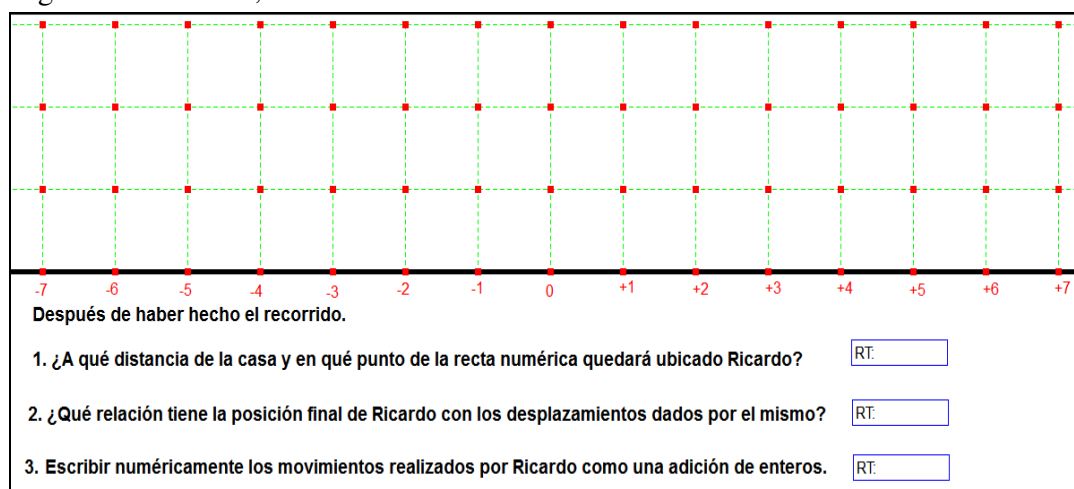
A continuación se presenta la primera sub-actividad desarrollada por los estudiantes y la imagen del archivo de Cabri entregado a los mismos:

1. (Archivo Figura 1.Fig.) Ricardo, en el día de ayer caminó por la calle de la ciudad la cual está ubicada en frente de su casa y conecta el oriente con el occidente de su ciudad; Él camino 3m hacia el

occidente de su casa y luego 5m en la misma dirección. Después de haber hecho el recorrido:

- ¿A qué distancia de la casa y en qué punto de la recta numérica quedará ubicado Ricardo?
- ¿Qué relación tiene la posición final de Ricardo con los desplazamientos dados por el mismo?
- Escribir numéricamente los movimientos realizados por Ricardo como una adición de enteros. (Ver figura 36)

Figura 36. Adición, sub-actividad 1



Con esta sub-actividad se pretendía enseñar la adición de números enteros con igual signo (signo positivo), para ello en el desarrollo se trataba de que el estudiante realice la representación de los dos movimientos dados por Ricardo en la recta numérica (cada uno en una línea recta distinta), visualice por medio de vectores la distancia total recorrida por Ricardo al final de los dos movimientos y asocie cada uno de los dos movimientos con un número entero positivo y la distancia total recorrida por Ricardo con la adición de los dos números enteros asociados a cada movimiento.

Su desarrollo fue de la siguiente manera: inicialmente se entregó la guía de la actividad a cada grupo, recomendándoles que la leyeran con sus compañeros de grupo ordenadamente, luego se pidió a cada estudiante que estaba encargado del manejo del computador que abriera el archivo de Cabri II Plus (guardado con anticipación por el equipo investigador en cada computador), dado al trabajo previo que ya tenían los estudiantes hasta esta instancia, no se presentó inconvenientes en este paso.

El archivo de la actividad se lo presentó para todos los estudiantes en el televisor LCD de 42 pulgadas, en la misma medida se leyó la guía de la actividad en voz alta explicando tanto en palabras como visualmente en el televisor de que trataba la actividad; la intervención fue la siguiente:

“la actividad se trata de representar mediante vectores en la recta numérica que les aparece a cada grupo en la pantalla del computador los dos movimientos que dio Ricardo en el día de ayer en el sentido occidente cada uno en una línea distinta, teniendo en cuenta el inicio y el fin de cada movimiento; además, dar respuesta a las tres preguntas que aparecen en la misma pantalla”

Después de esta intervención se preguntó si tenían preguntas al respecto y la mayoría respondió que sí. Un estudiante preguntó: *“¿Qué significa occidente?”*, en cuanto a ello se respondió diciendo:

“Es un punto de referencia para ubicar una determinada persona u objeto, el ejemplo más claro son las brújulas que les servían a los marineros para ubicarse, en nuestro caso el occidente es la parte derecha de la recta numérica teniendo como centro la casa de Ricardo”.

Posteriormente, se preguntó si para todos los grupos era clara la dirección de los dos desplazamientos de Ricardo y todos conjuntamente contestaron *“si es claro”*. Entonces, la etapa de desarrollo comenzó y se les pidió que anexen las respuestas en el mismo archivo donde tenían que realizar la construcción de los vectores; al igual que en las anteriores actividades, se recordó el tiempo que tenían para desarrollar la actividad y también el guardado del archivo en cada avance, con el fin de evitar inconvenientes técnicos o de energía por parte de los computadores.

En cuanto a la construcción, se observó que representaban con el cursor los dos vectores dinámicamente uniendo puntos entre la cuadrícula punteada dada en el archivo de Cabri, algunos grupos como ya estaban familiarizados con el programa, utilizaban nuevas opciones; entre las cuales estaba el cambiarle el grosor y el color a cada vector que estaba asociado a los movimientos de Ricardo, como también por sí mismos ya utilizaban el señalamiento y la tecla *supr* para borrar algún vector construido mal en la recta numérica.

Acabados los 40 minutos se pidió a los grupos guardar por última vez el archivo y poner atención dado que se empezaba la socialización de la actividad, con la lista de los grupos en mano se llamó a un representante del grupo 1 a que saliera al frente para compartir su construcción. El estudiante salió al frente con la guía del grupo y tomó el cursor del computador principal

el cual estaba conectado al televisor de 42 pulgadas que ya se ha mencionado en otras actividades.

Antes de hacer los vectores dijo lo siguiente: “las flechas de los vectores *deben de ir para el lado derecho*” y comenzó a construir el primer vector en la primera línea punteada, tomando como inicio al número cero y como final al número +3, luego construyó otro vector, el cual lo comenzó donde había terminado el primer vector, es decir en +3, y contó ayudado del cursor del computador cinco espacios hacia la derecha llegando al número +8, finalizó con la construcción del tercer vector en la tercera línea punteada, el cual unía los dos movimientos de Ricardo en un solo vector.

Terminada la construcción por parte del estudiante se pidió que tomara asiento, y se preguntó al grupo 11 si la construcción estaba bien, a lo que contestó uno de sus integrantes:

“Está bien porque los vectores quedan en la parte positiva de la recta y muestran los movimientos de Ricardo”

Después de ello se utilizó lo realizado por el estudiante para afirmar que la construcción era la correcta y en pocas palabras se resumió lo hecho por el estudiante.

Dado que la construcción era correcta se la dejó proyectada en la pantalla del televisor, el cual era visible para todos los grupos y se llamó al grupo 7 para que uno de sus integrantes responda desde su puesto la primera pregunta de la actividad, la cual era:

a) *¿A qué distancia de la casa y en qué punto de la recta numérica quedará ubicado Ricardo?*

El estudiante encargado tomó la palabra y respaldado por el desarrollo que tenía en la pantalla de su ordenador respondió lo siguiente:

“Ricardo se encuentra a ocho metros de la posición que inició y en la recta en +8”.

Por cuestiones de tiempo se argumentó que la respuesta del grupo 7 era correcta y que la socialización de las dos preguntas que faltaban continuarían al día siguiente.

Al siguiente día, después de haber llamado lista, se siguió con la socialización llamando a una integrante del grupo 4 para que contestara la siguiente pregunta:

b) *¿Qué relación tiene la posición final de Ricardo en la recta numérica con los desplazamientos dados por el mismo?*

La estudiante contesto diciendo lo siguiente: *“En la posición que queda es ocho metros”*, después de lo anterior se llamó al grupo 9 para preguntarle si la respuesta dada era correcta y el porqué de su argumentación. Un integrante del grupo contestó con lo siguiente:

“No es correcto ya que esa es la respuesta a la primera pregunta, la respuesta a esta pregunta es que son iguales”.

Debido a las respuestas erróneas, se decidió intervenir corrigiendo lo afirmado por los dos estudiantes:

“Las anteriores respuestas de sus compañeros no son correctas, debido a que la relación que hay, es que la posición final de Ricardo en la recta numérica es el resultado de la adición de los dos números enteros positivos que están asociados a los movimientos del mismo”.

Se continuó con la socialización del tercero y último enunciado, de tal forma que se llamó al frente a un representante del grupo 2 para que lo realizara, el enunciado se presenta a continuación:

c) *Escriban numéricamente los movimientos realizados por Ricardo como una adición de enteros.*

El representante paso al frente y ayudado por el cursor y el teclado del computador escribió sin decir palabra alguna la siguiente expresión matemática: $(+3) + (+5) = +8$, se tomó nuevamente la palabra y se preguntó al grupo 10 si era correcto lo que había escrito su compañero, dando la siguiente respuesta:

“Si es correcto, porque están los dos movimientos hechos de Ricardo y así también la tenemos nosotros”

Después de esta respuesta se concluyó diciendo que la expresión dada por el compañero del grupo 2 era correcta.

Se finalizó la socialización de la actividad, diciendo lo siguiente:

“La actividad nos permite en primera instancia apreciar la asociación de los movimientos de Ricardo con los números enteros positivos, dado que se dirige en los dos casos al occidente que en la recta numérica corresponde a la parte donde se encuentran los números positivos, como también nos muestra que la unión de los dos vectores que representan

los dos movimientos de Ricardo es más que una suma (adición) de dos enteros positivos, y que el resultado de esta suma es en la recta numérica el entero donde finaliza el último movimiento o en otras palabras donde termina el vector que representa el último movimiento. Además con la expresión que dio su compañero se puede observar que hay tres signos positivos, dos que están dentro de los paréntesis que aluden al número entero positivo y uno que está fuera y entre los paréntesis, el cual *representa la adición de los números enteros positivos*”.

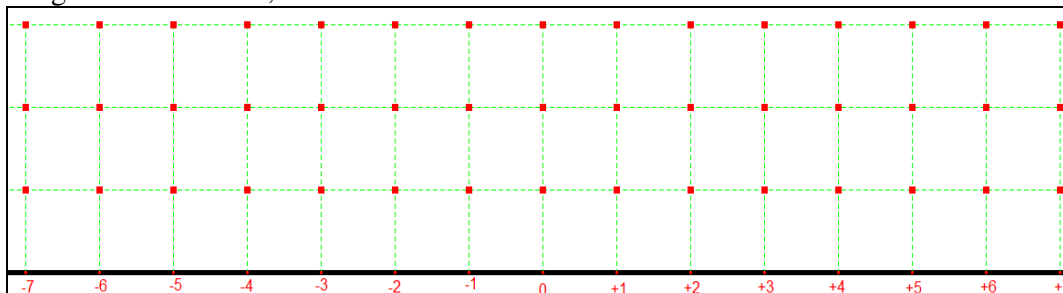
Con ello se finalizó el desarrollo y la socialización de la primera sub-actividad, la cual superó el tiempo estipulado registrando un total de 70 minutos en su implementación.

Dado que faltaba media hora para finalizar el periodo de matemáticas se siguió inmediatamente con la realización de la segunda sub-actividad, la cual se presenta a continuación con la imagen del archivo de Cabri entregado a los estudiantes:

Segunda sub-actividad: ADICIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

2. (Archivo Figura 2.Fig.) Diego, en el día de ayer caminó por la calle de su ciudad la cual está ubicada en frente de su casa y conecta el oriente con el occidente de la misma; él caminó 2m hacia el oriente de su casa y luego 7m en la misma dirección. Después de haber hecho el recorrido:
 - a) ¿A qué distancia de la casa y en qué punto de la recta numérica quedará ubicado Diego?
 - b) ¿Qué relación tiene la posición final de Diego con los desplazamientos hechos por el mismo?
 - c) Escribir numéricamente los movimientos realizados por Diego como una adición de enteros. (Ver figura 37)

Figura 37. Adición, sub-actividad 2



Después de haber hecho el recorrido.

1. ¿A qué distancia de la casa y en qué punto de la recta numérica quedará ubicado Diego?
2. ¿Qué relación tiene la posición final de Diego con los desplazamientos dados por el mismo?
3. Escribir numéricamente los movimientos realizados por Diego como una adición de enteros.

La finalidad era enseñar a los estudiantes de la IEM Cabrera la adición de números enteros con igual signo (signo negativo), pero ahora con Diego y enfatizando en la orientación de los vectores, dado que se quería que los estudiantes comprendan que si el vector va dirigido hacia el occidente (derecha de la recta numérica) estará asociado con un número entero positivo y si el vector está dirigido hacia el oriente (Izquierda de la recta numérica) representará un número entero negativo.

Para su presentación a los estudiantes se pidió silencio y el favor de que abrieran el archivo de Cabri, en cuyo caso no tuvo inconvenientes ningún grupo, a continuación, se proyectó en el televisor de la sala de informática el mismo archivo que tenía cada uno de los grupos y se prosiguió a leer la actividad, dando una breve explicación de la sub-actividad.

En la explicación no se gastó mucho tiempo, puesto que el desarrollo era igual que el de la primera sub-actividad, solamente se aclaró que presten atención con los vectores, ya que Diego ahora se desplazaría al oriente de la calle de su ciudad.

Se pasó inmediatamente al tiempo de desarrollo de la sub-actividad por parte de cada uno de los grupos, dando 30 minutos el cual era el tiempo que faltaba para terminar la clase. Durante el desarrollo se hizo la recomendación cotidiana de guardar los avances para evitar cualquier inconveniente, como ya se dijo anteriormente, esta sub-actividad era similar a la anterior, por lo cual, se observó que la mayoría de los grupos no tenían problemas en el desarrollo, terminados los 30 minutos se pidió guardar por última vez el archivo, dejar los computadores encendidos y que cada grupo salga en orden para su siguiente clase, diciéndoles que la socialización de la actividad se haría al otro día.

Al siguiente día, después de llamar a lista y verificar el funcionamiento de cada computador, se inició con la socialización de la sub-actividad trabajada en el anterior día, nuevamente se pidió a cada grupo que abrieran el archivo trabajado, lo mismo se hizo en el computador principal, de donde se proyectó el archivo de Cabri para empezar a socializar, es así que se llamó a un representante del grupo 3 para que pase al frente y realice (en el computador principal y en el televisor LCD de 42 pulgadas) delante de todos sus compañeros la construcción de los dos vectores correspondientes a los dos movimientos de Diego. El estudiante comenzó construyendo el primer vector en la primera línea punteada, iniciando en el número 0 y terminando en el número entero negativo -2, debido a que Diego se movía al oriente, enseguida representó el segundo movimiento en la segunda línea punteada tomando como inicio el final del primer vector, luego, contó 7 espacios hacia la izquierda de la recta numérica y llegó hasta el número -9 finalizando la construcción.

De inmediato se preguntó al grupo 8 si la construcción era correcta con lo pedido en la guía, contestando de la siguiente manera: *“Esta mal porque se debe ir al otro lado”*, debido a la respuesta obtenida, se preguntó nuevamente al grupo 12 si la respuesta dada por el grupo 8 era correcta, una estudiante respondió de la siguiente forma:

“la respuesta dada por el otro grupo está mal, puesto que la construcción debe de ser como la que está en el televisor, ya que los dos movimientos son negativos”.

Finalizada la intervención, se aclaró que la respuesta de los grupos 3 y 12 estaban correctas, ya que si se comparaba con los movimientos de Ricardo, el cual se dirigía al occidente y tenía representados sus movimientos con números positivos en la recta numérica, entonces, los movimientos de Diego que iban para el otro lado, deberían estar representados por números enteros negativos en la recta numérica.

Después de la construcción se pasó a la socialización de las preguntas. Para la primera, se llamó al grupo 13, al cual se le pidió elegir a un delegado para que responda a la siguiente pregunta:

a) *¿A qué distancia de la casa y en qué punto de la recta numérica quedará ubicado Diego?*

Un estudiante de ese grupo dio respuesta con el siguiente comentario: *“Ella queda a nueve metros”*, se intervino y se dijo que la respuesta estaba bien pero incompleta, dado que Diego, queda a 9 metros de su casa pero el punto de la recta en donde queda ubicada corresponde al número entero negativo -9.

Para la siguiente pregunta, enunciada a continuación, se llamó al grupo 12 para que le diera respuesta.

b) *¿Qué relación tiene la posición final de Diego con los desplazamientos dados por el mismo?*

A ello una de las estudiantes que estaba en el grupo dijo: *“Que donde quedó Diego en la recta numérica es la suma de los movimientos”*, como en la anterior pregunta se intervino diciendo que estaba bien la respuesta del grupo, dado que se tenía que interpretar esta sub-actividad como la primera relacionada con Ricardo, lo único que la diferenciaba, es que en ésta, los movimientos están relacionados con números negativos.

c) *Escriban numéricamente los movimientos realizados por Diego como una adición de enteros.*

El tercer enunciado fue resuelto por una estudiante del grupo 4, quien ayudada del cursor y del teclado del computador principal escribió en la pantalla del televisor la siguiente expresión matemática: $(-2) + (-7) = -9$ para retomar la metodología y mirando que el tiempo lo permitía, se preguntó al grupo 9 si la expresión era correcta y su argumentación.

Este grupo contestó lo siguiente: *“No es verdadero ya que hay un signo negativo”*, al escuchar la respuesta incorrecta del grupo, se tomó la palabra diciendo que la expresión matemática que había dado el grupo 4 era correcta y que en ella se podía apreciar el primer movimiento el cual era de 2 metros hacia el oriente, también el segundo movimiento que era de 7 metros en la misma dirección, además se mostró en el televisor por medio del cursor a todo el grupo que el resultado coincidía con el número entero donde había finalizado el segundo vector, el cual representaba al segundo movimiento hecho por Diego y que el resultado se lo podía representar con un tercer vector, que debía construirse a partir del número 0 hasta la cabeza del segundo vector (-9).

Luego de socializar las tres preguntas de la sub-actividad 2, se pidió a los estudiantes permanecer en silencio y pasar a la lectura de la segunda actividad de la adición de enteros. Con lo anterior se finalizaba el desarrollo de la primera actividad de adición de números enteros con igual signo, se guardó lo realizado por todos los grupos y se analizó lo realizado por ellos obteniendo los siguientes resultados:

Resultados de la primera sub-actividad de adición en los Números Enteros:

Tabla 12. Adición, sub-actividad 1

Primera sub-actividad	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Correctas	7	50,00%
Incorrectas	3	21,44%
Incompletas	2	14,28%
En Blanco	2	14,28%
Total Grupos	14	100,00%

Gráfica 11. Adición, sub-actividad 1

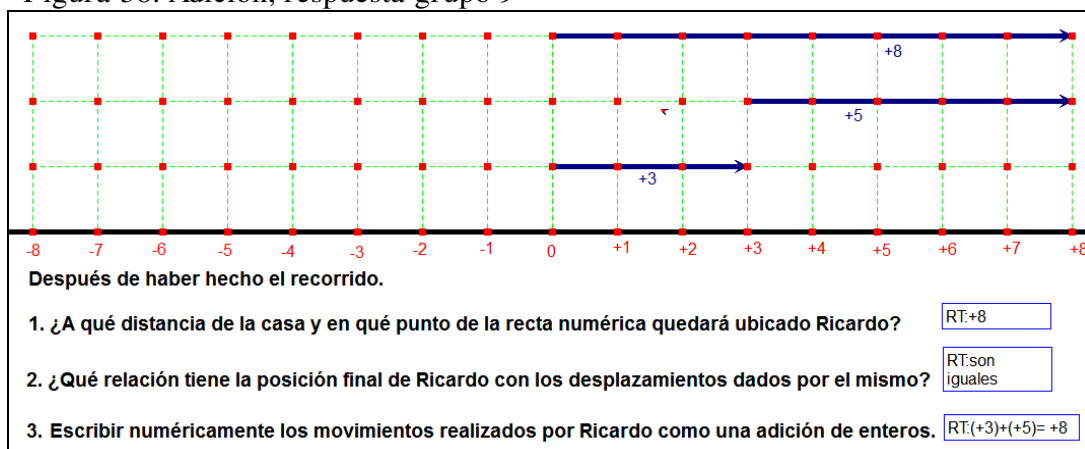
En la anterior tabla y gráfica estadística se muestra que siete grupos contestaron correctamente a la primera sub-actividad, se observa en su desarrollo la mediación tecnológica con el buen manejo que le dieron a las herramientas de Cabri II Plus, construyendo cada uno de los vectores en las rectas punteadas, dándoles grosor, color a los mismos y poniendo respuestas con ayuda de la opción texto, igualmente se aprecia la cognición situada con la buena comprensión grupal que le dieron a la actividad, al asociar de buena forma los movimientos de Ricardo con números enteros positivos en la recta numérica, como también al entender cómo se da la adición y el resultado de dos movimientos utilizando el modelo concreto de desplazamiento en la recta numérica. Conjuntamente los estudiantes manejaron adecuadamente el cambio de representaciones semióticas, dado que debían pasar de una representación verbal (enunciado de la actividad), a una representación gráfica (construcción de vectores) y finalmente a una representación numérica (pregunta tres).

Cabe resaltar que entre los siete grupos que contestaron correctamente ninguno de ellos contestó con precisión la pregunta dos, pero si contestaron a la pregunta tres correctamente, debido a esto se atribuye a que los estudiantes de la IEM Cabrera presentan problemas al tratar de comunicar una idea, ya que para ello utilizan un lenguaje no muy preciso dejando vacíos en las respuestas y como en este caso, comunicando un mensaje distinto al adecuado.

Ejemplo de los grupos que contestaron bien es el 9 (*Ver figura 38*), el cual, comprendió la finalidad de la actividad al utilizar de forma correcta la recta numérica para encontrar la respuesta de los interrogantes planteados en la sub-actividad, como también aunque no supo expresar con palabras precisas lo realizado numéricamente, entendió que la posición final de

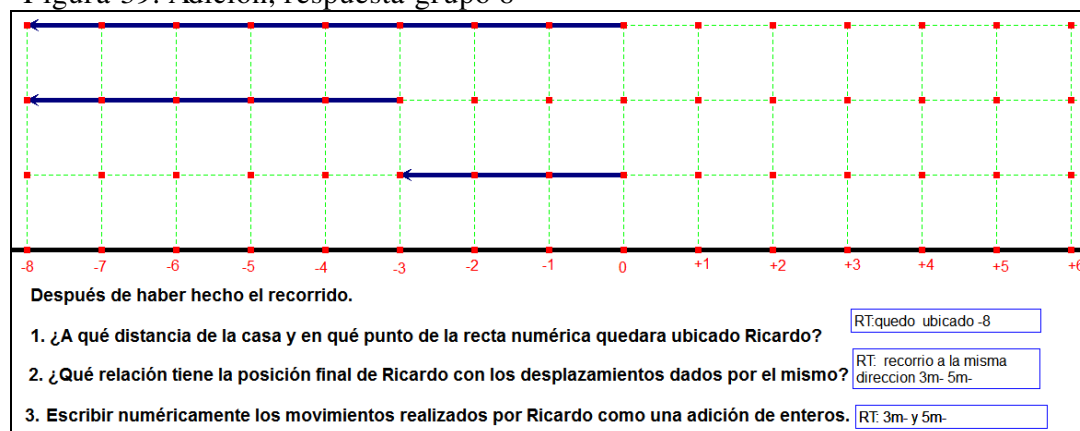
Ricardo en la recta numérica es el resultado de la adición de los desplazamientos realizados por él; además, asocia el sentido occidente de la calle de la ciudad con los números positivos en la recta numérica e igualmente se aprecia que el grupo puede representar de forma numérica la adición de los dos movimientos y su resultado.

Figura 38. Adición, respuesta grupo 9



En cuanto a las respuestas incorrectas, tres grupos presentaron fallas, debido a que no construyeron de forma adecuada los dos vectores en la recta numérica dada en Cabri II Plus correspondientes a los movimientos de Ricardo. Cabe resaltar que las fallas en los grupos 3 y 6 estuvo en el segundo vector dado que lo interpretaron como la continuación del primer vector finalizando los dos movimientos en el número entero +5, y aunque el grupo 8 representó correctamente el esquema de los dos movimientos en la recta numérica, se equivocó en el sentido que debía construir los vectores. La construcción del grupo 8 se muestra a continuación:

Figura 39. Adición, respuesta grupo 8



Por la dirección que se les dio a los vectores, la construcción es incorrecta, a pesar de que como se dijo anteriormente, el empleo del modelo concreto de desplazamiento en la recta numérica no presenta fallas, solo se equivocaron en la orientación de los vectores, atribuyendo este hecho a que el grupo no estuvo atento a las orientaciones iniciales realizadas en el comienzo de la sub-actividad. Dado a la dependencia que tenían las preguntas y la construcción, el grupo contesto erróneamente las tres preguntas, y en ellas se puede observar que a la distancia de cada uno de los dos movimientos la tomaron como negativa al insertar en las respuestas números enteros negativos y no la palabra oriente la cual daba el sentido a la parte contextual.

Dos grupos contestaron de forma incompleta la sub-actividad, se observó que la construcción de los vectores de los dos movimientos es correcta, pero no comprendieron bien los enunciados de algunas preguntas y las dejaron en blanco.

Dos grupos entregaron en blanco, debido a que no guardaron sus avances cuando desarrollaron la sub-actividad, por lo cual se piensa que no estuvieron atentos a las recomendaciones iniciales del profesor.

Resultados de la segunda sub-actividad de adición en los Números Enteros

Tabla 13. Adición, sub-actividad 2

Segunda sub-actividad	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Correctas	7	50,00%
Incorrectas	5	35,72%
Incompletas	1	7,14%
En Blanco	1	7,14%
Total Grupos	14	100,00%

Gráfica 12. Adición, sub-actividad 2

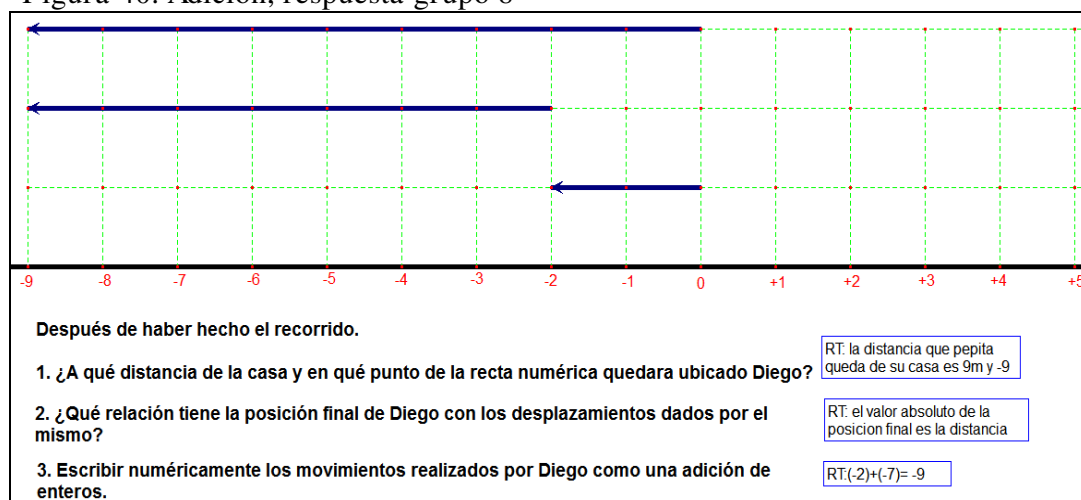
Siete grupos contestaron correctamente, en su desarrollo se aprecia que utilizan de forma adecuada el modelo de desplazamiento en la recta numérica al realizar una adición de dos números enteros de signo negativo. En esta construcción se observa la mediación tecnológica en la representación de los vectores, dado que los estudiantes accedieron a la opción vector de Cabri y ayudados por el cursor del computador realizaron cada vector en la línea punteada correspondiente; además, tuvieron la oportunidad de arrastrar el vector por la pantalla, cambiarle el color y el

grosor en el transcurso del tiempo estipulado para el desarrollo de la sub-actividad.

La organización en grupos en esta actividad fue importante dado que hubo discusión entre los estudiantes al ser ésta similar a la presentada anteriormente, atribuyendo solo un cambio en el sentido de los recorridos de Diego, además ayudó al desarrollo de la sub-actividad, ya que cada grupo asoció de buena forma los movimientos de Diego con números enteros negativos en la recta numérica, como también, entendieron cómo se da la adición y el resultado de dos movimientos que están relacionados con números enteros negativos en el modelo concreto de desplazamiento en la recta numérica. Además, los estudiantes manejaron adecuadamente el cambio de representación, dado que debían de pasar como en la actividad de Ricardo de una representación verbal (enunciado de la actividad), a una representación gráfica (construcción de vectores) y finalmente a una representación numérica (pregunta tres).

Ejemplo de ello es el grupo 8 (Ver figura 40), dado que comprendió bien el enunciado del problema e hizo la construcción de los dos movimientos de Diego en la recta numérica de manera correcta, observándose el buen manejo de las herramientas de Cabri II Plus; además, asoció el sentido oriente con la parte negativa de la recta numérica y entendió que cuando se trata de movimientos en la parte negativa de la recta numérica la distancia es el valor absoluto del entero negativo, como también escribió numéricamente de forma correcta los dos movimientos como una adición de dos enteros negativos.

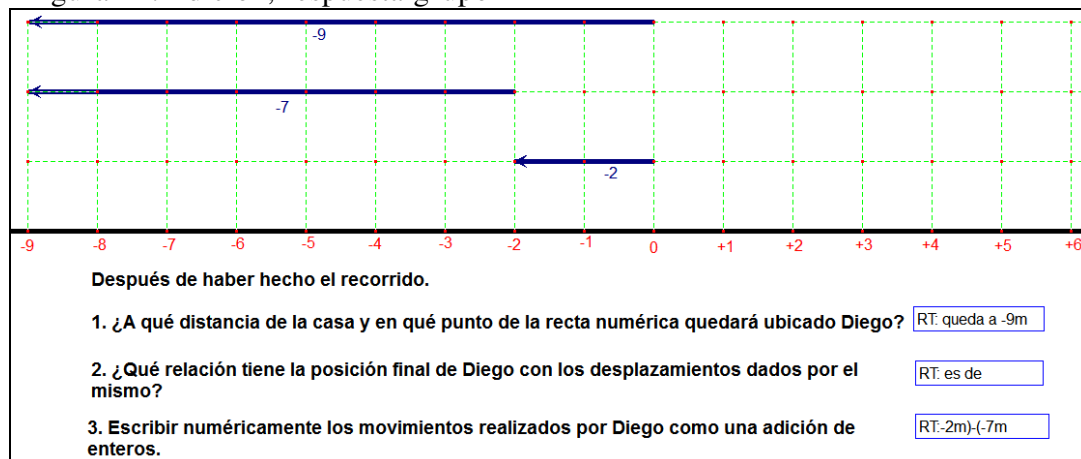
Figura 40. Adición, respuesta grupo 8



A cinco grupos se los clasifiqué con desarrollos incorrectos a pesar de que no presentaron fallas en la construcción de los vectores de los dos movimientos de Diego, no pudieron dar respuesta a alguna de las tres

preguntas, atribuyendo este hecho a la dificultad que tuvieron de comunicar sus ideas con palabras y expresiones matemáticas correctas. Prueba de lo anterior es el grupo 4 (Ver figura 41) que utilizó adecuadamente el modelo concreto de desplazamiento en la recta numérica, pero no fue claro a la hora de dar las respuestas.

Figura 41. Adición, respuesta grupo 4



Como se puede observar en la gráfica anterior, la primera respuesta dada es correcta, por lo cual, no se hará ningún comentario de ella, en cuanto a la segunda pregunta el grupo no la respondió, muy probablemente porque no pudieron interpretar y comunicar la construcción que ellos mismos realizaron.

La tercera respuesta es la más llamativa y por la cual se citó a este grupo, dado que en la expresión hecha en Cabri el grupo muestra la adición de enteros de signo negativo como una resta, hecho que se atribuye a la no atención de las explicaciones dadas en un inicio; asimismo, se puede asociar el error, a una conveniencia al dar la respuesta con todos los signos negativos.

Un grupo contestó de forma incompleta, ya que construyó bien los vectores de los dos movimientos de Diego en la recta numérica, pero al dar respuesta a los interrogantes, no contestó una de las tres preguntas y otra lo hizo de forma incompleta.

Otro de los grupos no contestó nada y entregó en blanco al finalizar el tiempo estipulado para el desarrollo de la actividad, debido a que no guardó los avances y el computador presentó inconvenientes técnicos al reiniciarse inesperadamente casi al finalizar dicho tiempo.

Continuando con la implementación de las actividades de números enteros se siguió con el desarrollo de la segunda actividad, llamada *EL ASCENSOR*, la cual estaba constituida por dos sub-actividades cada una

con su respectiva etapa de socialización; además, de una actividad de refuerzo; la cual, solo se desarrollaría y se daría una breve explicación.

Con esta actividad se pretendía estudiar la adición de números enteros con distinto signo, utilizando el modelo de desplazamiento en la recta numérica y Cabri II Plus. Igualmente como en la primera actividad, se propusieron sub-actividades donde se les planteó a los grupos, problemas que se asemejan con situaciones de la vida real y donde puedan utilizar el modelo de desplazamiento para dar respuesta a las preguntas planteadas.

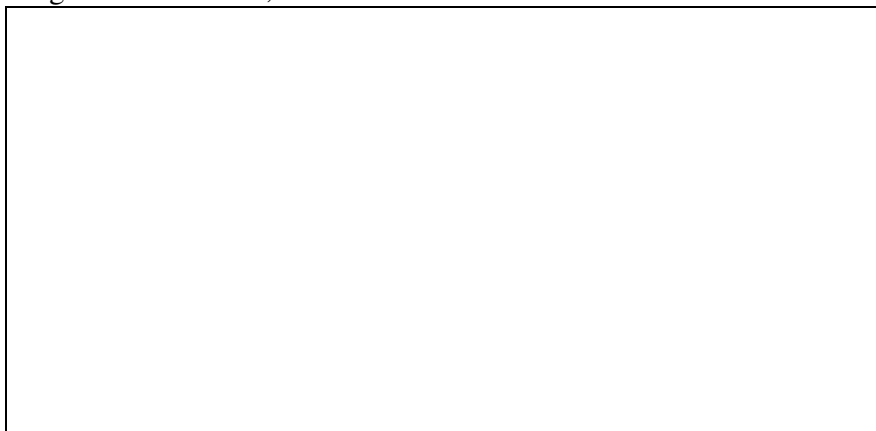
Esta actividad (la cual constaba de dos sub-actividades) está diseñada a la luz del contexto de un ascensor y de los movimientos de arriba hacia abajo, y de abajo hacia arriba recorridos por personas en un edificio constituido por pisos habitacionales y subterráneos a la vez; lo cual, permitía trabajar con otra orientación de la recta numérica, la vertical. A continuación se presenta la primera sub-actividad y cómo fue su desarrollo.

PRIMERA SUB-ACTIVIDAD: EL ASCENSOR

A continuación se presenta el enunciado de la actividad y una imagen del archivo de Cabri entregado a los estudiantes:

1. (Archivo Figura 1.Fig.) Con la ayuda de la recta numérica completar la tabla que se encuentra en el archivo de Cabri II plus. (Ver figura 42)

Figura 42. Adición, sub-actividad 1



Su desarrollo fue de la siguiente manera: debido que la socialización de la anterior sub-actividad se la realizó en 20 minutos y la hora de clase era de 55 minutos, inmediatamente se ordenó a los estudiantes leer la nueva guía y abrir el archivo señalado en Cabri para la sub-actividad, siguiendo mecánicamente con la metodología de desarrollo, se dio lectura a la guía en voz alta, interviniendo con el siguiente comentario:

“Esta sub-actividad se debe trabajar de la misma forma a las realizadas anteriormente, representando primeramente los movimientos que hace una persona en el ascensor y luego interpretar la construcción para dar respuesta a las preguntas que en este caso serán numéricas, dado que se trata de llenar una tabla, la cual aparece en el archivo que tiene cada uno abierto en este instante”

Después de la anterior intervención se preguntó si era claro para todos, obteniendo conjuntamente un sí de todos los grupos.

Al no presentarse dudas en cuanto a la sub-actividad, se optó por pasar a la etapa de desarrollo, dándoles el tiempo que faltaba para finalizar la clase de matemáticas, que era alrededor de los 33 minutos.

Se observó nuevamente la acogida y el entusiasmo que tenían entre ellos la construcción y la dinámica de la recta numérica en Cabri II plus, al igual que lo observado en la primera actividad de adición de números enteros.

En cuanto a la construcción de los vectores, a diferencia de las dos sub-actividades anteriores, la mayoría de grupos no presentaban inconvenientes con la dirección que debían tener ellos, demostrando más comprensión y facilidad al asociar un movimiento hacia arriba del ascensor con un número entero positivo y un movimiento hacia abajo con un número negativo.

Al terminar el tiempo se pidió que guardaran lo realizado hasta ese instante, debido a que la socialización de la sub-actividad se la realizaría al siguiente día, también se pidió apagar los computadores ya que se había decidido guardar las tres sub-actividades y no una por una al terminar la clase como se había venido realizando, esto con el fin de no incomodar a los profesores y estudiantes que seguían después en clase en la sala de informática 2 de la IEM Cabrera.

Al día siguiente, después de haberse organizado los estudiantes en sus grupos respectivos y de llamar lista, se pidió a todos los grupos abrir el archivo que habían desarrollado el día anterior y estar atentos, dado que se comenzaba la socialización de la actividad. La socialización comenzó llamando al frente a una estudiante del grupo 6 para que realice la construcción hecha por su grupo de trabajo, pasó al computador principal y empezó a construir el primer vector de la siguiente manera:

“Como Carlos está en el piso tres se puede decir que antes subió desde la calle entonces el primer vector va desde 0 hasta +3, y luego como bajó dos pisos entonces llegara el segundo vector a +1 y hay queda”.

Después de la construcción realizada por la estudiante se le pidió tomar asiento y se preguntó a un estudiante del grupo 13 si la construcción hecha por su compañera era correcta a lo cual dijo: *“Está bien dado que representa la actividad”*, al mirar que la respuesta del estudiante no estaba bien argumentada se le hizo una reiteración y se le preguntó que si quería agregar más y él respondió *“no”*, luego de haber escuchado al estudiante se intervino diciendo lo siguiente:

“La construcción hecha por su compañera del grupo 6 es correcta, ya que en ella, se muestra los dos vectores que representan los movimientos realizados por Carlos en el ascensor del edificio”.

Para llenar la tabla adjunta de la sub-actividad se llamó a un estudiante del grupo 9, este estudiante salió al frente y utilizando el computador principal comenzó a llenar la tabla de la siguiente manera:

“El piso inicial como sube es +3, el movimiento en el ascensor como baja dos pisos es -2 y llega al piso +1 que es el final, ahora la adición de enteros debe ser $(+3) + (-2) = +1$ ”

Después se llamó a un estudiante del grupo 5 y se le preguntó lo siguiente: ¿Las respuestas dadas de tu compañero son correctas? ¿Sí o no? ¿Por qué?, a lo que respondió: *“están bien porque representan los pisos donde Carlos estaba”*.

Al ver que las respuestas dadas por los dos estudiantes eran correctas y que no había preguntas, se finalizó con la actividad realizando la siguiente intervención:

“las respuestas que dieron sus dos compañeros son correctas, la tabla debía realizarse como está en la pantalla del televisor; en la construcción se mira claramente los dos movimientos realizados por Carlos en el ascensor del edificio graficado en Cabri, el primer vector se debía construir de 0 dado que el 0 está haciendo en nuestra gráfica como el piso por donde las personas entran y salen del edificio, dado que Carlos estaba en el tercer piso el primer vector debía ser orientado hacia arriba y representaría en la recta numérica el numero entero +3, el segundo movimiento hecho por Carlos fue bajar dos pisos en el mismo edificio de tal forma que el segundo vector tendría orientación hacia abajo y representaría al número entero negativo -2, su construcción se debía hacer desde el número entero +3 hasta el número entero +1, en la secuencia de los vectores presentes en la gráfica es donde está la suma de los números enteros que en este caso es de un número entero positivo y un número entero negativo, el resultado de dicha suma es el número o entero en la recta numérica que coincide con la cabeza final del segundo

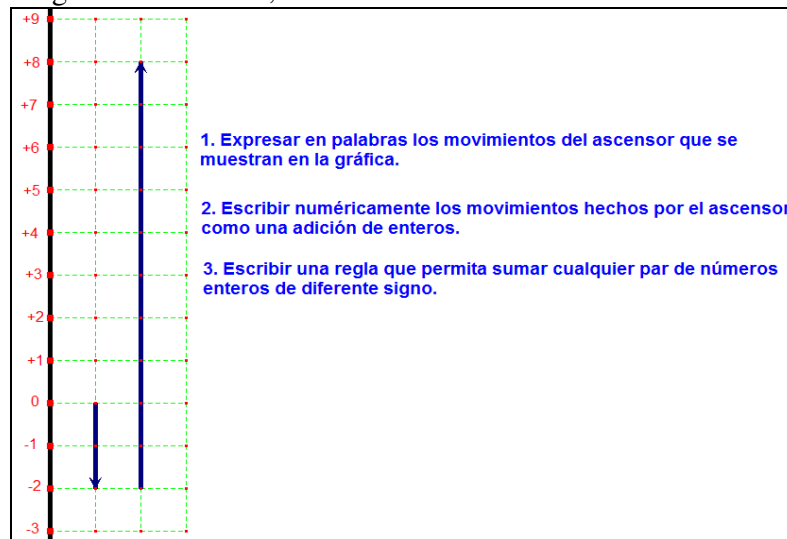
vector, en la sub-actividad el resultado como se puede observar es el +1 o en palabras del problema se diría que Carlos después de subir tres pisos y de haber bajado dos, queda finalmente en el primer piso del edificio y el resultado como pueden ver en la gráfica también se lo puede *representar con un tercer vector*”.

Con ello finalizaba la implementación de la primera sub-actividad de la actividad 2 de la adición de números enteros. Dado que la socialización de la primera sub-actividad se la realizó en 23 minutos se continuó con la segunda sub-actividad el mismo día. A continuación se presenta el enunciado de la actividad y una imagen del archivo de Cabri entregado a los estudiantes:

SEGUNDA SUB-ACTIVIDAD: EL ASCENSOR

2. (Archivo Figura 2.Fig.) Pedro el día lunes entró a un hospital a buscar a su hijo que se encontraba en una cita médica, él se subió al ascensor e hizo dos desplazamientos.
- a) Expresar en palabras los movimientos del ascensor que se muestran en la gráfica.
 - b) Escribir numéricamente los movimientos hechos por el ascensor como una adición de enteros.
 - c) Escribir una regla que permita sumar cualquier par de números enteros de diferente signo. (Ver Figura 43)

Figura 43. Adición, sub-actividad 2



Su desarrollo transcurrió de la siguiente manera: se pidió a los estudiantes abrir el archivo correspondiente a la segunda sub-actividad guardado con anticipación en cada computador, como también leer la guía, al contrario de las anteriores actividades se decidió pasar inmediatamente a la etapa de desarrollo, ya que la actividad era similar a las trabajadas anteriormente y se pretendía a la vez mirar como interpretaban la actividad los estudiantes sin intervenciones iniciales del profesor. Debido a ello se les dijo lo siguiente:

“En esta sub-actividad no habrá explicación inicial, por ser similar a la anterior”

Los estudiantes después de estas palabras presentaron acogida a la decisión y comenzaron a desarrollar la sub-actividad grupalmente, en esta etapa se pudo observar que la mayoría de los grupos no se les dificultó dar respuesta a la primera pregunta, ya que pudieron expresar de buena forma en palabras los movimientos del ascensor presentados en la recta numérica.

Igualmente pasó con la pregunta dos, ya que en la mayoría de grupos no se visualizó errores al dar los dos movimientos en forma numérica, se encontró dificultades con la tercera pregunta dado que se observó entre los distintos grupos la dificultad identificada en otras actividades de no poder comunicar por escrito en forma adecuada sus ideas.

Antes de finalizar la clase se pidió a todos los grupos guardar por última vez el archivo y apagar el computador, comentándoles que la socialización quedaría pendiente para la siguiente clase.

En el comienzo de la siguiente clase, como era habitual, se pidió a todos los grupos encender el computador y abrir el archivo que habían desarrollado y guardado en la anterior clase, con el fin de iniciar la socialización. Con todos los instrumentos a disposición se llamó a un estudiante del grupo 11 para que diera respuesta a la primera pregunta, la cual se enuncia a continuación:

a) Expresen en palabras los movimientos del ascensor que se muestran en la gráfica.

El estudiante pasó al frente, leyó en voz alta la primera pregunta y por medio de la opción texto de Cabri escribió lo siguiente: *“Pedro estaba en el piso -2 y luego subió al piso +8”*, después de la respuesta del estudiante se le pidió tomar asiento y enseguida se preguntó a un estudiante del grupo 2 si la respuesta dada por su compañero era correcta y el porqué, a lo cual respondió diciendo lo siguiente: *“no, está mal dado que no subió ocho pisos”*, se le pidió que saliera y corrija la respuesta de su compañero en un lado de la pantalla del televisor para que todos observen las dos respuestas, el estudiante salió y escribió lo siguiente:

“Estaba en el piso inicial, bajo dos pisos, subió 10 y quedo en el piso 8”

Luego se preguntó al grupo 7 que cual grupo había dado la respuesta correcta y él dijo que la respuesta que estaba correcta era la del grupo 2, dado que el ascensor había subido 10 pisos.

Se finalizó la socialización de la primera pregunta diciendo lo siguiente:

“El grupo 2 y el grupo 7 tienen razón, ya que como podemos ver en el televisor el primer vector representa el número entero -2, debido a que su orientación es hacia abajo y la cabeza del vector coincide en la recta numérica con -2, el segundo vector representa al número entero +10 y no al +8, ya que hay diez espacios desde donde inicia el segundo vector hasta donde termina y es positivo porque su orientación es hacia arriba, esto en cuanto a la asociación de vectores y números enteros, en cuanto a la relación de vectores y movimientos dados por Pedro se puede decir que él inicialmente entró al edificio y bajó en el ascensor dos pisos y luego subió diez pisos hasta llegar al piso 8 en donde tenía la cita médica”.

Para empezar la socialización de la segunda pregunta, se llamó a un estudiante del grupo 9 para que pasara al frente y diera su respuesta:

b) Escriban numéricamente los movimientos hechos por el ascensor como una adición de enteros.

El estudiante pasó con más confianza al frente, dado que en estas instancias de la investigación todos los estudiantes estaban familiarizados con la metodología. Utilizando el teclado, el cursor del computador y la opción de texto escribió lo siguiente en la pantalla del televisor “ $(-2) + (+10) = +8$ ”, se preguntó a una estudiante del grupo 12, si la respuesta de su compañero era la suma correcta de los dos movimientos dados por Pedro en el ascensor, y ella contestó:

“Sí es correcta ya que entre los paréntesis están los dos movimientos hechos por Pedro en el ascensor y además coincide el resultado con el número que hay en la recta”

A continuación se intervino diciendo lo siguiente:

“La expresión numérica que dio su compañero en el televisor es correcta, ya que como dijo su compañera, están los dos movimientos hechos por Pedro en el ascensor; además, se agregó que también están en orden, primero los dos pisos que bajo más los diez pisos que subió y,

el resultado es el número donde coincide la cabeza del segundo vector, que para el caso es $+8$ ”.

La tercera pregunta se la socializó de la siguiente manera: se llamó a un estudiante del grupo 3 a que pase al frente y responda al siguiente interrogante:

c) Escriban una regla que permita sumar cualquier par de números enteros de diferente signo.

El estudiante pasó al frente y dijo lo siguiente:

“La regla sería que primero se ponga a los mayores números de primeros para las restas y para las sumas en cualquier orden”

Finalizada la intervención del estudiante del grupo tres se pidió que tomara asiento y se llamó a un integrante del grupo 7 para que comparta su respuesta, la cual fue:

“Que el signo de sumar es mayor que el de restar o sea que cuando los números están con dos signos positivos se escribe el resultado positivo”

Al mirar la falencia que tenían los dos grupos en cuanto a la respuesta, se optó por pasar por cada computador rápidamente y escoger dos grupos que se acerquen a la respuesta correcta. Se encontró en el grupo 1 y en el grupo 4 mayor acercamiento a lo correcto, entonces se decidió guardar sus archivos y proyectarlos enseguida en la pantalla del televisor.

Se comenzó con el archivo del grupo 1, además se llamó a los dos integrantes para que pasen al frente y sustenten su desarrollo. Los integrantes del grupo dijeron:

“El signo del resultado se relaciona con uno de los dos enteros, ganando el que tiene más número, y el número del resultado se relaciona con los dos números”

Se les preguntó porque habían escrito eso y uno de ellos contestó: *“En la respuesta anterior se puede ver que es de esa forma”*, en cuanto a lo anterior se intervino diciendo que la respuesta del grupo 1 se la tomaba como correcta, dado que se entendía, aunque con dificultad, la idea que querían transmitir. Luego se proyectó la respuesta del grupo 4 con el fin de realizar lo mismo. Los estudiantes afirmaron:

“El resultado $+8$ obtuvo el signo del $+10$ así que el $+10$ es mayor que el -2 , luego se resta al $+10$ el -2 y así se da el resultado de $+8$ ”

Igualmente, se les preguntó a las integrantes del grupo 4, como al anterior grupo, porqué habían escrito lo que estaba en el televisor y una de ellas respondió:

“Lo escribimos mirando la adición de la pregunta anterior”.

Se pidió a las dos estudiantes tomar asiento y luego se intervino diciendo lo siguiente:

“La respuesta de sus dos compañeras es correcta y fue el grupo que más se aproximó a la regla de sumar dos números enteros de distinto signo. Se observó que aunque hubo actividades previas trabajadas en lo que tiene que ver al valor absoluto de un número entero, ningún grupo utilizó el concepto del mismo para dar la respuesta a esta pregunta. El valor absoluto es un concepto esencial para dar la regla general de la adición tanto entre dos números de igual signo como entre números enteros de diferente signo”.

Después de lo anterior se enunciaron las dos reglas que generalizaban la adición para cualquier par de enteros, de la siguiente forma:

“En palabras y en relación con lo visto anteriormente se pueden expresar de la siguiente forma: si se están sumando dos números enteros de distinto signo, el resultado tendrá el signo del número cuyo valor absoluto sea mayor, y para dar el número que acompañe al signo del resultado se resta el valor absoluto mayor del valor absoluto menor, y si se están sumando dos números enteros con igual signo como en el caso de las dos primeras sub-actividades de Ricardo y Diego, el resultado tendrá el signo que se repite en los dos números enteros y el número que acompañara al signo del resultado será la suma de los dos valores absolutos de los números”.

Con lo anterior se finalizaba con la implementación de la segunda actividad de adición de números enteros. A continuación se presenta los resultados del análisis:

Resultados de la primera sub-actividad de adición en los Números Enteros: El Ascensor

Tabla 14. Adición, sub-actividad 1

Primera sub-actividad	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Correctas	10	71,43%
Incorrectas	3	21,43%
Incompletas	0	0,00%
En Blanco	1	7, 14%
Total Grupos	14	100,00%

Gráfica 13. Adición, sub-actividad 1

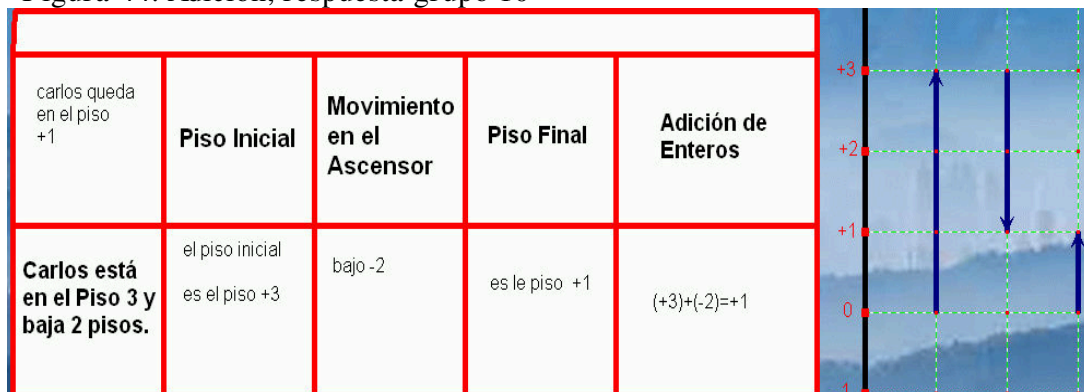
13 grupos contestaron completamente la tabla de la sub-actividad, de los cuales, 10 contestaron correctamente, mostrando en sus desarrollos la buena utilización del modelo de desplazamiento en la recta numérica, dado que construyeron con eficiencia mediante las herramientas del software dinámico Cabri II Plus, los dos vectores asociados a los movimientos de un ascensor; además, el haber trabajado grupalmente la sub-actividad ayudó a la correcta interpretación que dieron al enunciado, de tal forma que se miró discusión y complemento entre las ideas de los grupos para entender y asociar de buena forma, que el primer movimiento del ascensor debería estar representado con un número entero positivo dado que el ascensor subía tres pisos y de igual forma con el segundo movimiento, el cual debería estar asociado con un número entero negativo, dado que el ascensor después de haber subido tres pisos bajada dos pisos.

En cuanto a las etapas que tuvieron que realizar los estudiantes en el desarrollo de la sub-actividad se observa el cambio de representación y registros semióticos, puesto que, en primer lugar, los estudiantes pasaron de una representación verbal con el enunciado de la actividad a una representación gráfica al dibujar los vectores en la recta numérica y finalizaron con una representación numérica al llenar y completar la tabla, de esta forma se contempla en estos grupos en esencia general la comprensión de la adición de números enteros cuando tienen distinto signo, utilizando de forma correcta el modelo de desplazamiento en la recta numérica en el contexto de un ascensor.

Ejemplo de ello, es el grupo 10 (*Ver figura 44*) el cual asoció y representó bien los movimientos de Carlos en el ascensor con los números enteros correspondientes en la recta numérica, comprendiendo particularmente que si el ascensor sube el vector en la recta numérica tendrá orientación positiva

y si el ascensor baja, el vector asociado al movimiento en la recta numérica tendrá orientación negativa; además, el grupo entendió que al unir los dos movimientos realizados por Carlos se tendrá una adición de enteros de distinto signo y que el resultado a dicha adición, se lo podía encontrar representándolo con un vector en la recta numérica, es decir, por medio del vector que se forma entre el número cero y el número de la recta donde finaliza la cabeza del vector del segundo movimiento. Igualmente pudo representar de forma numérica los dos movimientos e interpretar en que piso quedó y qué número entero representa a este piso.

Figura 44. Adición, respuesta grupo 10



Los desarrollos incorrectos se sucedieron en tres grupos, dado que presentaron fallas en la interpretación del anunciado y consecuentemente a ello, presentaron fallas en los cambios de registro verbal, gráfico y numérico necesarios en la realización de la actividad. Entre estas fallas está el no haber podido representar y asociar, por medio de vectores, en la recta numérica los dos movimientos de Carlos, como también, el no haber podido expresar numéricamente en la tabla todos los pisos que tenían relación con la actividad e igualmente la adición de los dos movimientos en la tabla.

Un ejemplo concreto es el desarrollo del grupo 3 (*Ver figura 45*), el cual, al parecer, confundió la orientación vertical de la recta numérica, dado que orientó el primer vector hacia abajo y el segundo vector hacia la parte de arriba, contrariamente a lo que pedía la sub-actividad; además, no pudo representar el vector del resultado. En cuanto a la tabla, se observan fallas en tres de las cuatro casillas que la constituyen, el primer fallo está presente en la casilla de movimientos del ascensor dado que el grupo contestó verbalmente y no numéricamente como se había explicado en un inicio, esto se atribuye a que no pudo pasar del lenguaje verbal al numérico el movimiento del ascensor, el otro fallo está en la casilla del piso final, ya que ellos, escribieron numéricamente +2 sin tener argumento gráfico que respalde su respuesta, el último fallo está en la casilla de adición de enteros, en donde se aprecia números presentados sin ninguna justificación,

probablemente por no dejar en blanco la tabla. De lo anterior se concluye que el grupo no pudo utilizar de forma correcta el modelo de desplazamiento en la recta numérica.

Figura 45. Adición, respuesta grupo 3



El grupo trece no contestó nada y entregó en blanco al finalizar el tiempo estipulado para el desarrollo de la actividad, debido a que no guardó sus respectivos avances.

Resultados de la segunda sub-actividad de adición en los Números Enteros:
El Ascensor

Tabla 15. Adición, sub-actividad 2

Segunda sub-actividad	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Correctas	9	64,29%
Incorrectas	5	35,71%
Incompletas	0	0,00%
En Blanco	0	0,00%
Total Grupos	14	100,00%

Gráfica 14. Adición, sub-actividad 2

Todos los grupos contestaron completamente y en el tiempo estipulado para su desarrollo la sub-actividad, nueve de ellos contestaron correctamente, se observa en sus desarrollos la buena interpretación grupal que pudieron dar a la simulación presentada por medio del modelo de

desplazamiento en la recta numérica de los dos movimientos de Pedro en el hospital. Asimismo, asociaron cada uno de los dos vectores, en primera instancia con el número entero correspondiente a su representación y en segunda instancia contextualizaron el número entero representado en el vector con los pisos que Pedro recorrió dentro del ascensor en busca de su hijo. Dieron un buen manejo a las herramientas de Cabri tanto en el momento de interpretar la gráfica, como a la hora de dar respuesta a las tres preguntas.

En cuanto a los registros semióticos los estudiantes emplearon dos cambios; el primero es de lo gráfico a lo verbal, dado que se dio la construcción en la recta numérica de los dos movimientos de Pedro en el ascensor y cada grupo tuvo que interpretar dichos movimientos y expresarlos en palabras, en cuanto al segundo cambio, éste fue de lo gráfico a lo numérico, al contestar la respuesta dos, debido a que cada grupo tenía que consignar en una expresión matemática y en forma de adición los movimientos representados en la gráfica.

En la respuesta de la pregunta tres se observó en los grupos la falencia de comunicación de las ideas y el mal manejo que le dan al lenguaje, se tuvo que asociar e interpretar lo que cada grupo había querido plasmar en cada archivo, encontrando en el grupo 4 (*Ver figura 46*) un acercamiento a la respuesta buscada con la pregunta. Este mismo grupo comprende de forma correcta los movimientos presentados en la recta numérica dados por Carlos en un ascensor, asimila que si el ascensor sube la representación en la recta numérica está dada por un entero positivo y si el ascensor baja la representación en la misma recta se dará por un número entero negativo, como también sabe escribir numéricamente la adición de los dos movimientos pedidos e identifica que el resultado de la adición de dos enteros de signo contrario en el modelo de desplazamiento, corresponde al vector que parte de cero hasta la cabeza final del segundo vector.

Además al tratar de generalizar y dar una regla de adición de dos números de distinto signo, entiende que tanto el signo como el resultado dependen del número mayor y de la resta de los dos respectivamente.

Figura 46. Adición, respuesta grupo 4

1. Expresar en palabras los movimientos del ascensor que se muestran en la gráfica.

pedro fue el lunes al hospital a visitar a su hijo y al llegar bajo dos pisos y luego subió 10 pisos en total su recorrido en el hospital fue de 8

2. Escribir numéricamente los movimientos hechos por el ascensor como una adición de enteros....

$$(-2)+(+10)=+8$$

3. Escribair una regla que permita sumar cualquier par de números enteros de diferente signo.

el resutado +8 obtubo el signo el +10 así que el +10 es mayor que el -2 luego se resta al +10 el -2 y así se da el resultado de +8 .

Cinco grupos contestaron de forma inadecuada, se observa que no comprenden los movimientos de un ascensor cuando están representados gráficamente en una recta numérica, como también presentan errores al pasar dichos movimientos a una representación numérica; conjuntamente, no lograron identificar qué pasa con la adición de dos enteros cuando tiene signos contrarios y además presentando fallas ortográficas e incoherencia entre las ideas dadas en la respuesta.

Un ejemplo de los desarrollos incorrectos es el del grupo 5, dado que no comprende correctamente el segundo movimiento que dio el ascensor y lo representa con el número entero +8, esto quiere decir que empieza a contar el recorrido del segundo vector desde el número 0 y no desde donde finaliza el primer movimiento, que en este caso es desde el número entero negativo -2, asimismo, al representar numéricamente los dos movimientos como una adición de enteros no lo hace de una manera apropiada e igualmente el resultado es erróneo.

En cuanto a la regla pedida en la pregunta 3, la responden con una expresión numérica similar a la de la pregunta 2, dando a entender que la escribió sin ninguna justificación y por no dejar el espacio de la pregunta en blanco, (Ver figura 47).

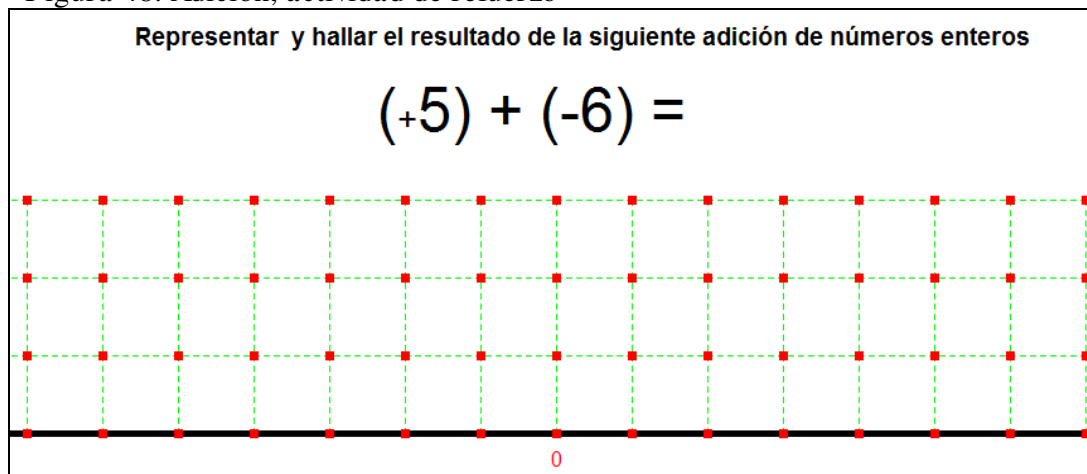
Figura 47. Adición, respuesta grupo 5

1. Expresar en palabras los movimientos del ascensor que se muestran en la gráfica.	el vector comienza en -2 y termina en +8
2. Escribir numéricamente los movimientos hechos por el ascensor como una adición de enteros.	$(-2) + (+8) = +8$
3. Escribir una regla que permita sumar cualquier par de números enteros de diferente signo.	en que $-2 + 8 = +8$

3. ACTIVIDAD DE REFUERZO (Refuerzo. Fig.)

Ahora, continuamos con una breve descripción sobre la actividad de refuerzo trabajada con los estudiantes acerca de la adición de números enteros de diferente signo, la cual puede apreciarse a continuación:

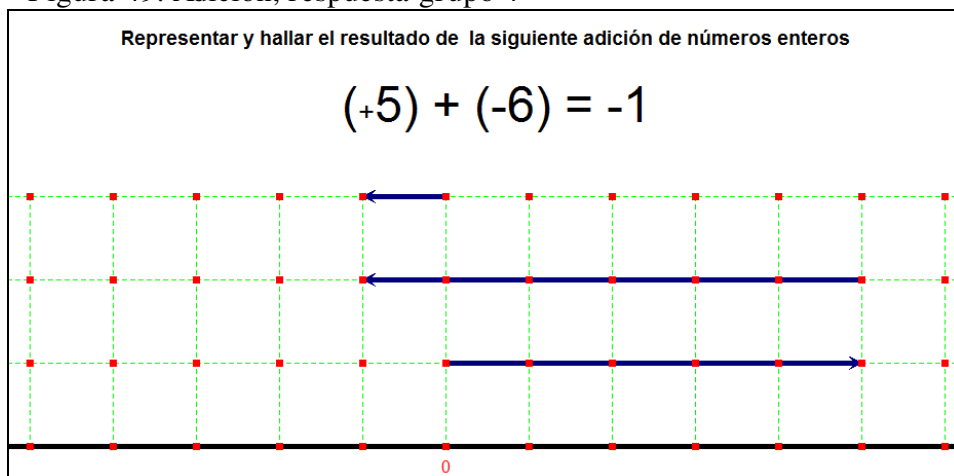
Figura 48. Adición, actividad de refuerzo



Con esta actividad se pretendía que los estudiantes aplicasen el desarrollo hecho en las actividades sobre el ascensor, o sea, la suma de dos números de diferente signo, pero ahora, el mayor valor absoluto sería el del número negativo. De esta actividad de refuerzo, se puede decir que más del 80% de los grupos realizaron correctamente el desarrollo, esto debido muy probablemente al trabajo que se había realizado con la actividad del ascensor, es decir, ya estaban familiarizados con este tipo de situaciones. En cuanto al resto de los grupos, se observó que ellos no tuvieron un desarrollo adecuado, ya que no habían puesto atención a las

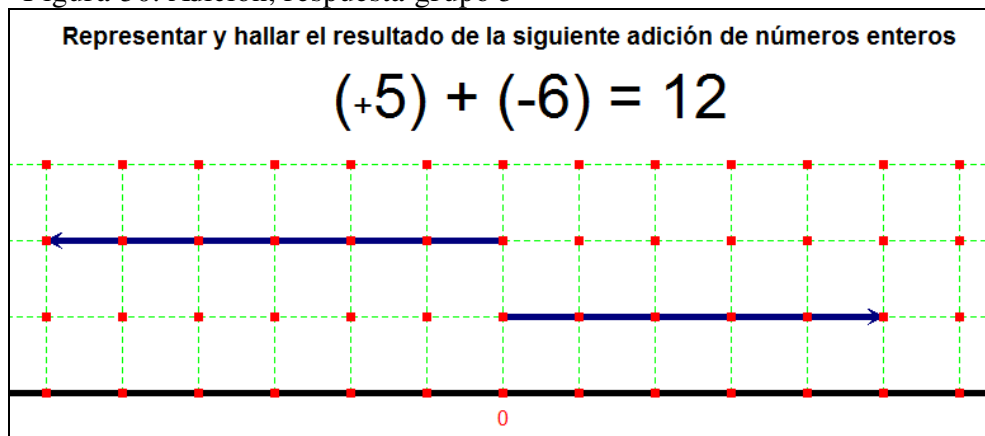
recomendaciones de los investigadores. A continuación se presenta el desarrollo hecho por el grupo 4, el cual realizó correctamente la actividad.

Figura 49. Adición, respuesta grupo 4



En la anterior figura se puede apreciar el buen desarrollo que realizó el grupo mencionado, además de la correcta utilización de las herramientas de Cabri. Por otro lado, en el desarrollo hecho por el grupo 5 (Ver figura 50), se observa que los estudiantes no comprendieron el ejercicio propuesto, muy probablemente por no estar atentos a las explicaciones que se habían dado. Cabe señalar que en la sub-actividad 2 del ascensor, este mismo grupo tuvo inconvenientes con la realización de dicha actividad.

Figura 50. Adición, respuesta grupo 5



Con lo anterior se da por terminado el análisis de las actividades de adición en los números enteros y se pasa al de la sustracción en los mismos.

4.6 ACTIVIDADES DE SUSTRACCIÓN EN LOS NÚMEROS ENTEROS

Para este tema se diseñó una actividad llamada *EL MAGO*, la cual a su vez estaba constituida por tres sub-actividades, en las cuales, el desarrollo a seguir con respecto a la sustracción de los números enteros se relacionaba con la actividad de un Mago, esto con el fin de que el estudiante pueda interpretar y desarrollar cada actividad de forma lúdica y divertida.

Con esta actividad se pretendía enseñar a los estudiantes de la institución educativa la sustracción de números enteros con igual signo y distinto signo, puntualizando conceptualmente que la sustracción de números enteros es inversa a la adición de los mismos, igualmente se utiliza el modelo de desplazamiento en la recta numérica y Cabri II Plus. Se propuso actividades donde se planteó a los grupos de estudiantes problemas con situaciones acordes a su contexto y a su edad, además, donde utilicen el modelo de desplazamiento para dar respuesta a las preguntas de la guía.

La metodología de desarrollo para esta actividad fue la misma que se había venido utilizando, puesto que, hasta este momento dicha metodología no había presentado inconvenientes. A continuación se presenta el enunciado de la actividad y una imagen del archivo de Cabri entregado a los estudiantes:

Primera sub-actividad: EL MAGO

1. (Archivo *Figura 1.Fig.*) Analizar el dibujo.
 - a) ¿Qué se puede decir de lo anterior?
 - b) ¿Es correcto lo que realizó el Mago? ¿Por qué?
 - c) Explicar en palabras la magia realizada (Ver figura 51)

Figura 51. Sustracción, sub-actividad 1

Antes de la magia	Después de la magia
<div style="border: 2px solid blue; padding: 10px; display: inline-block;">$-2 + (-1) = -3$</div>	<div style="border: 2px solid blue; padding: 10px; display: inline-block;">$-2 - (+1) = -3$</div>
<ol style="list-style-type: none">1. ¿Qué se puede decir de lo anterior?2. ¿Es correcto lo que realizó el Mago? ¿Por qué?3. Explicar en palabras la magia realizada	

Con esta sub-actividad se pretendía que los estudiantes comprendan que la sustracción de números enteros es inversa a la adición, para ello en el desarrollo se trataba de que el estudiante visualice, contraste e interprete dos expresiones numéricas con las que pueda concluir que la sustracción de dos números enteros es igual a una adición del primer número con el inverso del segundo número.

Su desarrollo fue de la siguiente manera: Como la socialización de la última sub-actividad de números enteros se realizó en los 20 minutos iniciales de clase, se destinó el tiempo que faltaba para empezar a desarrollar la actividad de sustracción de números enteros, la cual inició con la entrega de la guía correspondiente a la actividad, para que sea leída grupalmente, e igualmente se pidió a cada grupo abrir el archivo de Cabri II Plus destinado para su desarrollo. En esta etapa se miró en cada grupo el dominio que ya tenía en el manejo del computador al buscar en poco tiempo el archivo y abrirlo.

Al observar el esquema de la sub-actividad en Cabri, los estudiantes mostraron acogida al diseño de la misma, igualmente, se proyectó el archivo en la pantalla del TV y se pidió atención a todos los grupos, con el fin de dar las explicaciones iniciales:

“La sub-actividad se trata de mirar el dibujo con sus compañeros de grupo y darse cuenta qué ocurre con los dos números enteros que se presentan en las dos expresiones matemáticas, antes y después de realizar la magia, y con ello responder las preguntas que están en sus respectivos archivos”.

Después de lo anterior se preguntó a todos los estudiantes si había alguna inquietud en cuanto a cómo se debía realizar la actividad, a lo cual todos los estudiantes contestaron con un “no”, debido a ello y por el tiempo que quedaba para finalizar la clase (el cual era de 28 minutos), se pidió a todos los grupos pasar al desarrollo de la actividad teniendo en cuenta la explicación inicial.

En la etapa de desarrollo se observó que la mayoría de grupos interpretaron adecuadamente la gráfica presentada, ya que discutían entre ellos lo que ocurría con la magia realizada, evidenciando que el haber estado en grupos ayudó a visualizar entre los estudiantes, los cambios que se dan al hacer una sustracción de dos números enteros como una adición. Además se observó que todos los integrantes de cada grupo manejaban el programa de Cabri sin ninguna dificultad, esto en cuanto acataron con respeto y orden la recomendación hecha en un inicio con relación a que en cada actividad se debía rotar el computador en el desarrollo de la investigación.

Faltando algunos minutos para terminar la clase se pidió a todos los estudiantes guardar el archivo y apagar el computador, dado que la socialización de esta sub-actividad se la realizaría en la siguiente clase.

Ya en la siguiente clase, se llamó a lista y se pidió que se abriera el archivo que se había trabajado en la anterior clase, igualmente se proyectó en el televisor de la sala de informática el mismo archivo que todos tenían en sus computadores, se pidió atención y silencio a todo el auditorio, dado que comenzaba la etapa de socialización.

Para que dé respuesta a la primera pregunta que se cita a continuación se llamó al grupo 9.

a) *¿Qué pueden decir de lo anterior?*

Este grupo delegó a uno de sus estudiantes, al cual se le pidió que leyera la pregunta y luego diera la respuesta, respecto a lo segundo él afirmó:

“Que cambiaron los números y signos a la vez”

Enseguida se llamó a un estudiante del grupo 1 para que diera opinión de la respuesta de su compañero, mirando a la pantalla de su ordenador dijo: *“Está bien pero en realidad sólo cambian los signos”*. Se tomó la palabra y se dijo lo siguiente:

“Como se había mencionado en un principio la actividad consistía en mirar que era lo que ocurría con las dos expresiones numéricas, la primera pregunta nos invita a interpretar que cambios hay en ellas; de las dos intervenciones anteriores la que más se acerca a la respuesta correcta es la dada por el grupo 9, dado que al mirar la primera expresión del antes de la magia, se aprecia que es una adición de los números enteros -2 y -1, que al pasar por la magia del mago que está en la pantalla le suceden unos cambios, dado que el signo + de adición cambia a el signo – de una sustracción y el segundo número -1 cambia de signo a +1, si nos acordamos de las primeras actividades de conceptualización de enteros a este número lo podríamos llamar opuesto y esos son los dos cambios que se visualizan en la gráfica”.

A continuación se pasó a la socialización de la segunda pregunta la cual decía lo siguiente:

b) *¿Es correcto lo que realizó el Mago? ¿Por qué?*

Para ello se llamó al grupo 3, entre ellos decidieron quien la respondería y uno de estos tomó la palabra, leyó la pregunta y respondió diciendo:

“Es correcto ya que antes y después de la magia da el mismo resultado”,

Al mirar que la respuesta dada por el grupo 3 era correcta, se decidió culminar con la socialización de la pregunta diciendo lo siguiente:

“Lo que nos dice su compañero es correcto y así se debía contestar, ya que las dos expresiones tienen el mismo resultado, lo cual nos muestra que la adición de dos números enteros la podemos cambiar con una sustracción y viceversa, este hecho en matemáticas es posible ya que la adición y la sustracción de enteros son operaciones inversas”.

Para la respuesta de la tercera pregunta, descrita a continuación, se llamó a una estudiante del grupo 12:

c) Expliquen en palabras la magia realizada

La estudiante después de leer la pregunta respectiva en la pantalla de su computador dijo lo siguiente:

“Se debe convertir la adición y buscar su oponente para que dé el mismo resultado”,

Visto lo anterior, se llamó al grupo 8 y se le preguntó que si era correcta la respuesta de su compañera, obteniendo la siguiente afirmación:

“Es correcto lo que dijo la compañera dado que la magia se refiere a esos cambios”

Después de la intervención del estudiante del grupo 8, se preguntó en forma general, si otro grupo quería compartir la respuesta dada a la pregunta, a lo cual el grupo 4 exclamó su disposición a participar y una de las dos integrantes dijo:

“Cambia la forma en unos minutos y la magia es el cambio de suma a resta y también del opuesto”

Finalizadas las intervenciones se intervino diciendo lo siguiente:

“Las respuestas de los tres grupos son correctas, puesto que la magia del mago consiste en cambiar la adición de los dos números enteros por una sustracción y al segundo número por su opuesto”.

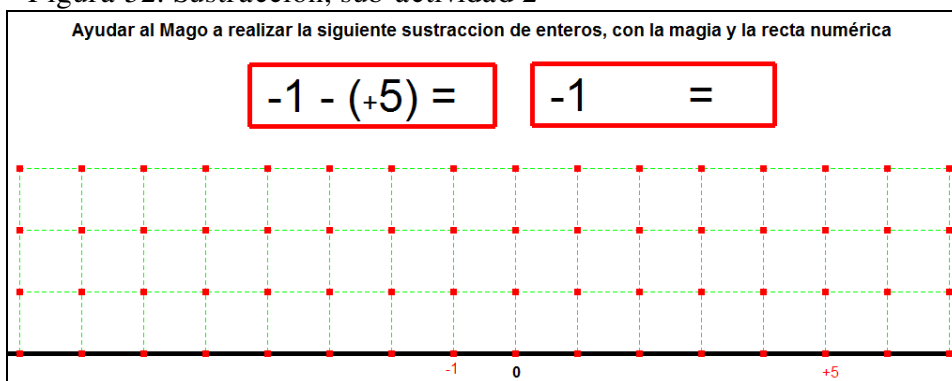
Con lo anterior se finalizaba la socialización de la primera sub-actividad de sustracción de números enteros. Por tanto se pasa a la segunda sub-actividad, la cual se muestra a continuación con una imagen del archivo de Cabri entregado a los estudiantes:

Segunda sub-actividad: EL MAGO

2. (Archivo Figura 2.Fig.) Ayudar al Mago a realizar la siguiente sustracción de enteros, con la magia y la recta numérica (Ver figura 52)

$$-1 - (+5) =$$

Figura 52. Sustracción, sub-actividad 2



Lo anterior pretendía reforzar la relación que hay entre la adición y la sustracción de dos números enteros, llevando al estudiante a la aplicación del concepto visualizado en la anterior actividad, dado que para obtener el resultado correcto de la sustracción, el estudiante tendría que escribirla como una adición y luego dinámicamente representar la adición mediante vectores en la recta numérica de Cabri para obtener el resultado.

Para su desarrollo se pidió nuevamente a los estudiantes abrir el archivo correspondiente a la segunda actividad, el cual estaba en la misma carpeta de la anterior, ningún grupo tuvo dificultad en abrirlo y se pidió también leer la guía y mirar con sus compañeros de grupo de que trataba la sub-actividad.

Se proyectó el archivo de la actividad en la pantalla del televisor para comenzar la explicación de ella, luego se pidió atención a los grupos y se dijo lo siguiente:

“Como pueden ver en las pantallas de sus computadores y en el televisor la actividad se trata de ayudar al Mago a realizar la sustracción de dos números enteros, la cual aparece escrita numéricamente en la guía y en el archivo de Cabri, para ello deben de utilizar la magia del Mago de la sub-actividad anterior y la recta numérica”.

Al terminar la explicación se preguntó si había inquietudes de cómo realizar la sub-actividad, a lo cual el grupo 7 hizo la siguiente pregunta: *“¿Para qué es el cuadro que hay frente a la sustracción?”*, a lo cual se respondió:

“Ese cuadro es para que en él puedan aplicar la magia del Mago y junto con la recta numérica poder realizar la sustracción”.

A continuación de la explicación, se pidió a los estudiantes pasar al desarrollo de la sub-actividad. En esta etapa, se observó en la mayoría de grupos la correcta aplicación que dieron a la magia realizada por el Mago, dado que entendieron que tenían que expresar la sustracción como una adición y luego hacer la adición en la recta numérica por medio de vectores para poder dar respuesta a la sustracción.

Además se observó el buen trabajo en grupo, dado que se los miró discutiendo en cómo había sido la magia en la actividad anterior y como debían proceder al desarrollo teniendo en cuenta la adición y la recta numérica.

Al día siguiente, después de haber encendido los computadores y de haber llamado lista, se pidió a cada grupo abrir el archivo guardado en el día anterior y poner atención dado que se comenzaba la socialización de la sub-actividad, para ello se llamó a un estudiante del grupo 10 para que comparta el desarrollo que había hecho su grupo, el estudiante pasó al computador principal de la sala de informática y empezó el desarrollo; primero dijo lo siguiente:

“Dado a que toca aplicar la magia del Mago entonces hay que cambiar a la resta por suma y también el opuesto”

Y a continuación realizó lo siguiente: $-1 + (-5)$, luego dijo: *“Ya que tenemos la suma para el resultado debemos de construir los vectores”* enseguida hizo el vector que representa al número entero -1 en la primer recta punteada y al vector que representa al número entero -5 en la siguiente recta punteada y sin construir el vector del resultado concluyo mirando el final del segundo vector que el resultado era -6 y finalmente dijo:

“Dado a la magia del Mago el resultado tanto de la suma y de la resta será -6 ”.

Al final se preguntó a todo el auditorio si otro grupo tenía un desarrollo diferente al que había hecho su compañero en la pantalla del televisor, a lo cual respondieron todos los estudiantes que “no”, dado a la respuesta correcta del estudiante y por motivos de tiempo se intervino diciendo:

“Lo realizado por su compañero está correcto, ya que aplicó lo visto en la anterior actividad al cambiar el número entero $+5$ por su opuesto -5 y a la sustracción por una adición para obtener su resultado, el desarrollo y la representación de los dos números enteros que se están sumando en la recta numérica por medio de vectores también es correcto”.

Finalizada la anterior explicación se pidió cambiar el manejo del computador para la siguiente actividad; además, se entregó la guía para que fuera leída grupalmente y se solicitó abrir el archivo correspondiente a la sub-

actividad tres. A continuación se presenta el enunciado de la actividad y una imagen del archivo de Cabri entregado a los estudiantes:

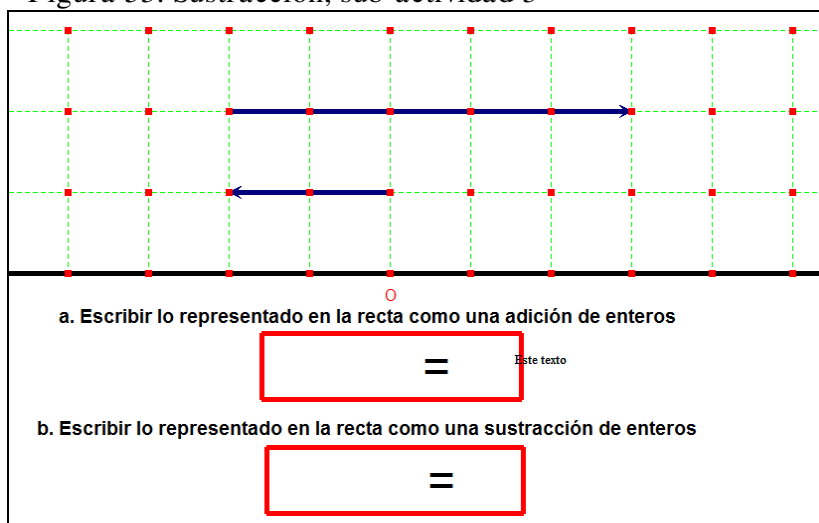
Tercera sub-actividad: EL MAGO

3. (Archivo *Figura 3.Fig.*) El Mago representó una operación de enteros en la recta numérica:

- a) Escribir lo representado en la recta como una adición de enteros.
- b) Escribir lo representado en la recta como una sustracción de enteros.

(Ver figura 53)

Figura 53. Sustracción, sub-actividad 3



Con esta sub-actividad se pretendía que el estudiante interprete la adición gráfica en la recta numérica y aplique la relación inversa de las operaciones de adición y sustracción de números enteros en forma numérica, pasando de una representación semiótica gráfica a una numérica.

Para su desarrollo, se proyectó en la pantalla del televisor lo realizado por el Mago y se dio la siguiente explicación:

“En esta sub-actividad cada grupo tiene que interpretar la adición de forma gráfica que se presenta en la recta numérica de Cabri y escribir primeramente la adición de los dos enteros en forma numérica y luego ayudados por la magia del Mago como una sustracción de dos enteros”.

Después de la explicación se preguntó si era claro lo que se tenía que hacer y todos los estudiantes respondieron que era claro, por lo cual se

decidió pasar a la etapa de desarrollo y se pidió a todos los grupos desarrollar la sub-actividad teniendo en cuenta que el tiempo que tenían para dicha tarea eran los minutos que faltaban para acabar la clase de matemáticas.

En el desarrollo se miró que a estas alturas de la investigación, los estudiantes no presentaron inconvenientes con la interpretación de la suma presentada por medio de vectores en la recta numérica, ellos inmediatamente descubrieron los dos números enteros que se estaban sumando y su resultado; también, se observó claridad al expresar la adición de los dos números enteros como una sustracción.

Al día siguiente después de llamar lista, se pidió como ya era frecuente abrir el archivo a cada grupo y hacer silencio dado que se iniciaba con la socialización de la actividad del día anterior, se proyectó en el televisor el archivo con el diseño requerido para efectuar la sub-actividad y se prosiguió llamando a un estudiante del grupo 2 para que saliese al frente y diera respuesta al primer enunciado, el cual decía lo siguiente:

a) Escribir lo representado en la recta como una adición de enteros.

El estudiante escribió sin decir palabra alguna lo siguiente: $-2-(+5)=+3$, al mirar que la respuesta estaba errónea en el signo de la operación, se preguntó al grupo 1 que opinaba de la respuesta del grupo 8 y respondió: *“está mal ya que en el medio debe ir un más”*, inmediatamente el estudiante del grupo 8 se dio cuenta de su error y lo corrigió, escribiendo: $-2+(+5)=+3$, apoyados por lo realizado y las respuestas de los grupos llamados, se concluyó diciendo:

“Al principio la respuesta de su compañero era errónea dado que en el enunciado se pide que escriban a los dos enteros representados por los vectores como una adición o en otras palabras como una suma, la respuesta final está bien, dado que el primer vector va a la izquierda de la recta numérica y está a dos espacios del número cero, representado al número entero -2 y el otro vector tiene dirección positiva dado que señala al lado derecho y representa al número +5, debido a que inicia en -2 y termina en +3, el resultado se lo aprecia en el tercer vector, el cual es +3”.

Para la socialización del segundo enunciado se llamó a una estudiante del grupo 4, el cual consistía en lo siguiente:

b) Escribir lo representado en la recta como una sustracción de enteros.

La estudiante se acercó al computador inicial y dijo:

“Lo que toca hacer es cambiar la adición con una sustracción teniendo en cuenta el opuesto del segundo número”

Luego, escribió lo siguiente: $-2-(-5)=+3$, siguiendo a la metodología que se venía realizando se llamó al grupo 14 y se le preguntó que si la respuesta de su compañera era correcta, a lo cual respondió:

“Si, dado que aplicó la magia del Mago para cambiar a resta”,

Al mirar que las respuestas eran correctas tanto en el desarrollo como en la socialización se finalizó diciendo:

“Lo que escribió su compañera es correcto dado que cambió la adición de los dos enteros -2 y +5 a una sustracción teniendo en cuenta en dicho cambio el opuesto del número +5”.

Después de la explicación se dijo a todos los grupos que con ello finalizaban las sub-actividades de sustracción de números enteros y que lo que se había visto era una de las muchas formas de proceder en la realización de adiciones y sustracciones con números enteros y que para ello se había tomado el modelo concreto de desplazamiento en la recta numérica en los contextos de una calle y un ascensor.

A continuación se presentan los resultados de los análisis hechos a las actividades de los 14 grupos:

Resultados de la primera sub-actividad de sustracción en los Números Enteros: EL MAGO

Tabla 16. Sustracción, sub-actividad 1 Gráfica 15. Sustracción, sub-actividad 1

Primera sub-actividad	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Correctas	12	85,72%
Incorrectas	1	7,41%
Incompletas	0	0,00%
En Blanco	1	7,41%
Total Grupos	14	100,00%

En la anterior tabla y gráfica estadística se observa que doce grupos contestaron de manera correcta a la sub-actividad, lo cual demuestra la buena interpretación que la mayoría de los grupos dieron a la gráfica

presentada en Cabri, al visualizar y entender la relación entre la adición y la sustracción de números enteros como dos operaciones inversas; además, dieron un buen manejo a las herramientas de Cabri tanto en el momento de interpretar la gráfica como a la hora de dar respuesta a las tres preguntas. De igual forma, se observa el buen cambio de registro que utilizaron los doce grupos al pasar de una representación numérica a una representación verbal, dado que interpretaron en palabras lo sucedido con las dos expresiones matemáticas en relación.

Un ejemplo de lo dicho anteriormente es el grupo 6 (Ver figura 54), quien interpretó de forma correcta las dos expresiones matemáticas. En la gráfica expuesta de la sub-actividad, comprende que después de la magia que realizó el Mago, la adición de enteros cambia a una sustracción del primer número con el opuesto del segundo número, como también concluye que como el resultado es igual en las dos operaciones, la magia es correcta.

Figura 54. Sustracción, respuesta grupo 6

Antes de la magia	Después de la magia
<div style="border: 2px solid blue; padding: 10px; display: inline-block;"> $-2 + (-1) = -3$ </div>	<div style="border: 2px solid blue; padding: 10px; display: inline-block;"> $-2 - (+1) = -3$ </div>
<p>1. ¿Qué se puede decir de lo anterior? cambian los números y los signos</p> <p>2. ¿Es correcto lo que realizó el Mago? ¿Por qué? que si es correcto por los resultados le dieron igual</p> <p>3. Explicar en palabras la magia realizada la magia del mago que cambia los signos</p>	

Además se observa en la organización de los datos estadísticos que un grupo contestó de forma incorrecta a la sub-actividad, debido a que no pudo interpretar los cambios entre las dos expresiones matemáticas de adición y sustracción de números enteros presentes en la gráfica, dando como resultados respuestas erróneas a las esperadas por la actividad.

El grupo del cual se está hablando es el 8, su desarrollo se muestra a continuación:

Figura 55. Sustracción, respuesta grupo 8

Antes de la magia	Después de la magia
$-2 + (-1) = -3$	$-2 - (+1) = -3$
<p>1. ¿Qué se puede decir de lo anterior? la figura esta bien realizada</p> <p>2. ¿Es correcto lo que realizó el Mago? ¿Por qué? no porque no se puede cambiar los signos</p> <p>3. Explicar en palabras la magia realizada deberian cambiar los resultados ya que los signos cambian</p>	

En la primera respuesta se puede observar que el grupo no estuvo atento a la explicación inicial, dado que califica la estética del diseño de la actividad y no la relación matemática de las expresiones numéricas en relación, como también en la segunda y tercera respuesta deja apreciar su mala visualización e interpretación de lo numérico, afirmando que no se puede cambiar los signos, atribuyendo este hecho a que el proceso de cambio de adición a sustracción entre dos números enteros no es correcto, contradiciendo anteriores actividades respecto al opuesto de un número entero; finalmente, lo corrobora al decir que si los signos cambian también deberían cambiar los resultados.

Por otro lado, el grupo 14 entregó en blanco la actividad, ya que en el tiempo de desarrollo estipulado para ella, el computador presentó inconvenientes de funcionamiento del sistema operativo y no pudieron guardar el archivo trabajado.

Resultados de la segunda sub-actividad de sustracción en los Números Enteros: EL MAGO

Tabla 17. Sustracción, sub-actividad 2 Gráfica 16. Sustracción, sub-actividad 2

Segunda sub-actividad	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Correctas	9	64,29%
Incorrectas	4	28,57%
Incompletas	0	0,00%
En Blanco	1	7,14%
Total Grupos	14	100,00%

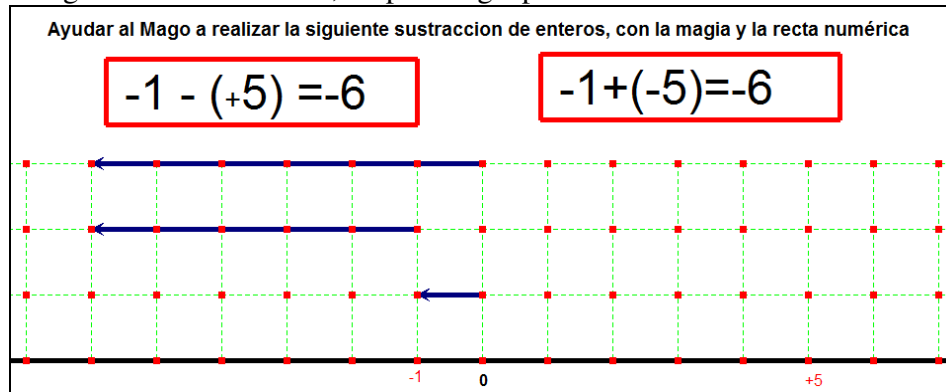
Nueve grupos contestaron correctamente la sub-actividad, se observó la buena interpretación que dio cada grupo de la forma como se tenía que realizar la actividad, el haber estado en grupos conllevó a que esta etapa se haya realizado en poco tiempo y de forma eficaz, dado que todos los integrantes del grupo aportaban ideas y discusiones de cómo realizarla (*Solución de problemas*); además, dieron un buen manejo de las herramientas de Cabri al escribir ayudados con el cursor, el teclado del computador y la opción insertar texto de Cabri, la adición de los dos números enteros en relación y las respuestas, como también el buen manejo de las opciones vector, grosor y color al representar la adición de los dos números enteros en la recta numérica.

La fluidez conceptual estuvo presente en el cambio que los estudiantes realizaron de una sustracción por una adición de números enteros, asimismo, al comprender que son inversas y al utilizar el concepto de número opuesto, desligado del modelo de desplazamiento; en cuanto al cambio de registros, ellos pasaron de una representación numérica a otra, al tener que cambiar la sustracción por adición de dos números enteros, luego pasaron de una representación numérica a una gráfica, dado que tuvieron que representar la adición numérica en la recta a través de vectores y finalmente pasaron de una representación gráfica a una numérica, al dar la respuesta en las dos expresiones matemáticas interpretando los vectores.

Un ejemplo de los grupos que desarrollaron la actividad correctamente es el grupo 4 (*Ver figura 56*), dado que comprendió la relación que hay entre la adición y la sustracción de números enteros al cambiar, en primera instancia, el signo que representa la sustracción de -2 y de +5 a una adición de los mismos enteros; posteriormente, cambió al +5 por el opuesto que en este

caso es -5, luego representó de forma correcta la adición de los números en la recta numérica como lo muestra la figura y por medio de la realización de la adición de enteros llegó al resultado de la sustracción pedida en la sub-actividad.

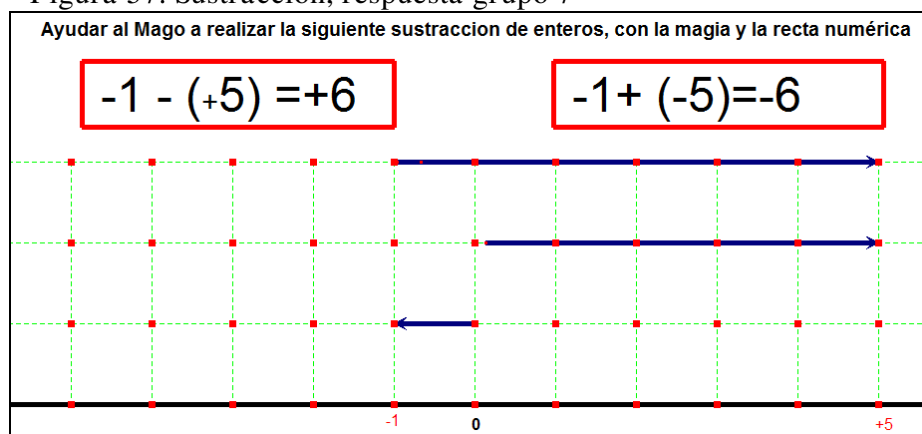
Figura 56. Sustracción, respuesta grupo 4



Cuatro grupos contestaron inadecuadamente la sub-actividad, en su desarrollo se aprecia que no tienen claro la relación inversa presente en la adición y sustracción de dos números enteros, exponiendo fallos en la búsqueda del opuesto de un número y en la diferencia de los signos “+” y “-” de adición y sustracción respectivamente; en cuanto al manejo de las herramientas de Cabri no presentaron inconvenientes.

Un ejemplo particular de estos desarrollos fue el grupo 7 (Ver figura 57), dado que este grupo en primera instancia pudo escribir la sustracción de los números enteros como una adición, pero presentó fallos en la representación gráfica de la adición en la recta numérica, evidenciando problemas en la construcción del segundo vector, el cual finalizaba en un número diferente al que tenían como resultado las dos expresiones numéricas.

Figura 57. Sustracción, respuesta grupo 7



Cabe resaltar que el grupo 11 entregó en blanco la actividad, ya que el computador presentó inconvenientes con el estabilizador, apagándose dos veces en la etapa de desarrollo.

Resultados de la tercera sub-actividad de sustracción en los Números Enteros: EL MAGO

Tabla 18. Sustracción, sub-actividad 3 Gráfica 17. Sustracción, sub-actividad 3

Tercera sub-actividad	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Correctas	11	78,58%
Incorrectas	1	7,14%
Incompletas	0	0,00%
En Blanco	2	14,28%
Total Grupos	14	100,00%

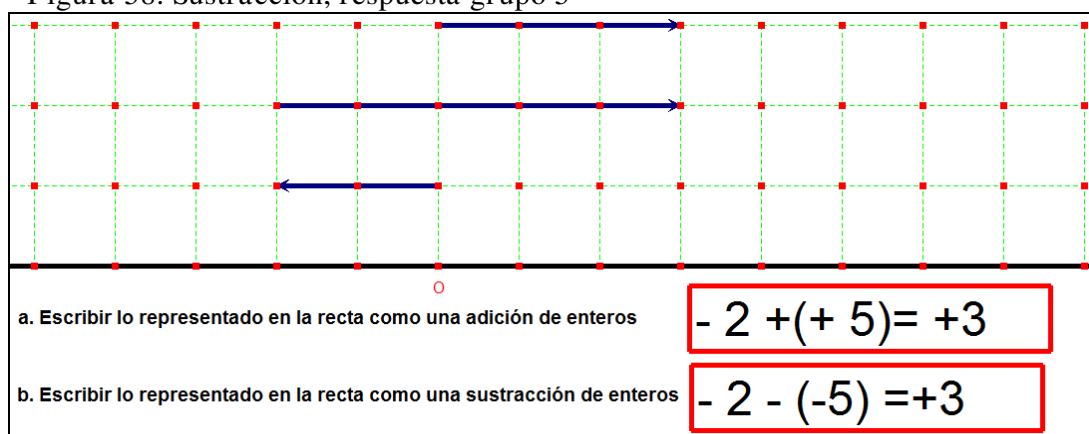
11 grupos contestaron correctamente, se observa que interpretan de forma correcta la adición de enteros representada en la recta numérica mediante vectores, debido a que escriben numéricamente de forma adecuada dicha adición; además, dominan la transformación que se debe hacer para representar una adición de enteros como una sustracción.

En cuanto a las herramientas de Cabri, se observa una buena utilización, dado que al escribir numéricamente la adición presentada en la gráfica, recurrieron a la opción texto de Cabri, igualmente al escribir la segunda respuesta.

El cambio de registro que utilizaron inconscientemente los estudiantes para el desarrollo de la sub-actividad, fue el paso de una representación gráfica a una representación numérica, al interpretar por medio de números enteros los vectores dibujados en la recta numérica.

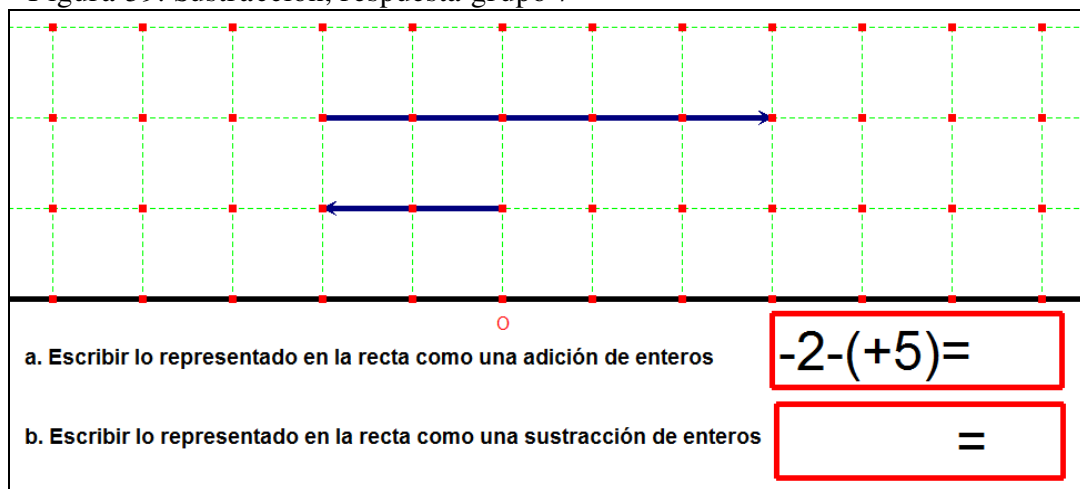
Un ejemplo de estos grupos fue el 5 (Ver figura 58), el cual interpretó bien la adición de números enteros dada gráficamente en la figura, ya que pudo expresarla de forma numérica sin ninguna dificultad; además, comprende y utiliza eficazmente el proceso de convertir una adición de números enteros en una sustracción, dando a conocer con su desarrollo, que solo basta cambiar el signo + por – y al segundo número entero cambiarlo por su inverso, concluyendo que el resultado será el mismo para las dos operaciones.

Figura 58. Sustracción, respuesta grupo 5



El único grupo que contestó incorrectamente fue el grupo 7, se aprecia que no entendió la finalidad de la sub-actividad, ya que presentó problemas con la interpretación de la adición gráfica de números enteros presentada en el archivo de Cabri; además, no pudo reconocer por separado los dos números enteros que representaba cada vector de la adición y su resultado, por lo cual, falló en la escritura numérica tanto en la adición como en la sustracción de los números enteros expuestos en la figura. El desarrollo de este grupo se muestra a continuación.

Figura 59. Sustracción, respuesta grupo 7



Los grupos 11 y 14 entregaron en blanco la actividad, debido a que no acataron las recomendaciones iniciales del profesor y no guardaron el desarrollo trabajado en el tiempo estipulado para la sub-actividad.

5. CONCLUSIONES

- ✓ *COMUNICACIÓN:* Durante el desarrollo de la investigación se observó, en cuanto a lo verbal, que los estudiantes manejaban muchas concepciones matemáticas, pero a la hora de explicarlas o utilizarlas para justificar sus respuestas, no sabían cómo hacerlo, que palabras utilizar, como iniciar, etc., llegando en ocasiones, al manejo de señas para poder explicar sus respuestas. Por el lado de lo escrito, se presentaron casos tales como: la mala escritura, mala ortografía, inconsistencias de lo escrito, etc. Además, se constató que los estudiantes afirmaban algo, pero al momento de escribirlo daban a entender cosas muy diferentes. Es por eso que una de las tareas primordiales de los docentes de matemáticas, es fortalecer los procesos comunicativos, tanto a nivel verbal como escrito.
- ✓ *MEDIACIÓN TECNOLÓGICA:* Con ayuda del computador, un software de Geometría como lo es Cabri II plus y el modelo de desplazamiento, se pudo realizar el estudio de los números enteros de una manera más dinámica, divertida y amena para los estudiantes, poniendo de manifiesto la amplificación que sufren los contenidos matemáticos cuando se tiene una ayuda tecnológica. Lo anterior, fue observable al momento de realizar las construcciones, puesto que los estudiantes, movían, ampliaban, cambiaban de color los objetos, los contraían, etc., es decir, realizaban los cambios que ellos querían, sin ninguna restricción y sin perder de vista el punto hacia donde se quería llegar. Asimismo, se abordó implícitamente temas que más adelante serán necesarios para el estudio de otras temáticas, como por ejemplo: los vectores, muy utilizados en grado décimo, una idea intuitiva de función (un punto depende de otro), que es uno de los temas vistos en grado noveno, la dilatación y contracción de vectores, entre otros; mostrando así la reorganización curricular que sufren las matemáticas cuando se trabaja con ayuda de nuevas tecnologías.

De la misma forma, el dinamismo que presenta Cabri II Plus permitió a los estudiantes obtener grandes conclusiones sobre algunas características de los números positivos con respecto de los negativos: los positivos son opuestos a los negativos, sin importar como este ubicada la recta numérica, la longitud de un vector representado por un número positivo y por el mismo número pero

negativo, es la misma. Lo anterior, surge del hecho de que los estudiantes al momento de construir el conjunto, pudieron ubicar la recta numérica en cualquier lado y cualquier dirección, sin perder de vista la oposición entre estos números. Por otro lado, pudieron identificar los diferentes significados que toman los signos más y menos, tanto al momento de indicar la dirección de un movimiento (positiva o negativa) como al indicar una operación planteada (adición y sustracción).

- ✓ *REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EJECUTABLES:* En el desarrollo de la investigación, se observó que los estudiantes saltaban de un registro semiótico a otro, es decir, se trabajaba los números desde un aspecto numérico (distancias) y luego se pasaba a uno geométrico (desplazamientos dirigidos) o viceversa; además, el dragging o arrastre permitió que los estudiantes realizaran cambios muy importantes en sus construcciones; dichos cambios ayudaron a que los estudiantes pudieran visualizar de una manera más clara y dinámica lo concerniente al conjunto de los números enteros; algunos ejemplos donde se pudo apreciar lo anterior son: la dilatación o contracción de la recta numérica Cabri (manejo de diferentes patrones de medida), el desplazamiento de la recta numérica por toda la pantalla (dinamismo de la recta), los giros o cambios de dirección que realizaban de la recta numérica Cabri o de los vectores con los que se estaba trabajando (permitiendo que los estudiantes puedan concluir cosas como las descritas en párrafos anteriores). Visto lo anterior, se puede decir que la ejecutabilidad de las representaciones semióticas son de gran ayuda a la hora de abordar cualquier tema matemático y más aún si se trata de los números enteros.
- ✓ *COGNICIÓN SITUADA:* El trabajo en grupo permitió un mejor desarrollo de las actividades, puesto que cada estudiante aportó su punto de vista dentro del grupo, originándose así un conflicto cognitivo en el interior de cada uno de ellos y cuando un representante de cada grupo presentaba su desarrollo en la socialización general, el conflicto cognitivo volvía a salir a flote, igualmente, se originaba una estandarización del conocimiento, puesto que, después de las intervenciones de los estudiantes, uno de los investigadores aclaraba para todos la actividad que se había desarrollado. De lo anterior, se puede decir que el conocimiento iniciaba en un plano de comunidad (grupo de trabajo), luego pasaba a un plano individual y finalizaba nuevamente en el plano grupal. Igualmente, se observó que en el interior del aula se había originado una competencia cognitiva sana, puesto que los grupos estaban a la expectativa de quien había desarrollado la actividad mejor, quien realizó las construcciones de

una manera más precisa, buscando, por parte de los estudiantes, que su grupo fuera el mejor.

Por otro lado, el trabajo en grupo permitió que algunos de ellos fueran siempre uno o dos pasos más adelante en el desarrollo de las actividades, es decir, habían grupos que no terminaban cierta actividad y ya proponían algunas conclusiones muy interesantes sobre el desarrollo que realizaban e incluso, concluían cosas de actividades que vendrían más adelante, poniendo de manifiesto lo que Vigotsky plantea como “*La Zona de Desarrollo Próximo*”.

- ✓ **SOLUCIÓN DE PROBLEMAS:** Todas las guías presentadas a los estudiantes tenían implícito la solución de problemas, claro está, en algunas actividades se enfatizaba más que en otras. Cerca de un 80% del total de las guías, manejaban contextos que eran familiares o cotidianos para los estudiantes, lo que permitió que los estudiantes trabajaran desde las 4 perspectivas o heurísticas básicas en la solución de problemas: *comprensión del problema*, se presentaba en la lectura y debate interno que realizaban los grupos acerca de las guías presentadas; *diseño y aplicación de un plan de acción*, se presentaba en el momento de realizar las construcciones en Cabri, y por último, *la examinación de la solución*, la cual, se manifestaba al momento de realizar las conclusiones (cambio de un registro semiótico a otro) y posteriormente, en la socialización de dichas actividades. Lo anterior, pone de manifiesto la gran ayuda que brindan las nuevas tecnologías en el desarrollo de temas matemáticos, y más aún, si se maneja desde una perspectiva de la resolución de problemas
- ✓ **FLUIDEZ CONCEPTUAL Y FLUIDEZ ALGORÍTMICA:** En lo concerniente a la fluidez conceptual se podría decir que se alcanzaron diferentes niveles, entre ellos: la comprensión del conjunto de los números enteros tanto en su construcción como en su representación gráfica, la aplicabilidad numérica o gráfica que tienen estos números y el modelo de desplazamiento en la vida cotidiana, la diferenciación de los significados que toman los símbolos “+” y “-” en el trabajo con números positivos y negativos, la relación entre distancia y valor absoluto, entre otras. Por otro lado, los grandes avances que se evidenciaron con respecto al manejo del software (construcción de objetos en Cabri) y al desarrollo de las guías de trabajo por parte de los grupos, pone de manifiesto la gran fluidez algorítmica que se desarrolló durante todo el proceso de la investigación.
- ✓ **LA GEOMETRÍA Y EL MODELO DE DESPLAZAMIENTO:** Con el apoyo de la geometría y el modelo de desplazamiento se pudo realizar la construcción del conjunto de los números enteros desde dos

aspectos: un aspecto estático (puntos representados en la recta) y un aspecto dinámico (distancias, desplazamientos, vectores, etc.), mostrando así, que dicho modelo y la ayuda de un software de geometría dinámica son de gran ayuda a la hora de tratar con dicho tema, tanto en su creación como en su operatoria. Asimismo, los vectores colaboraron mucho, puesto que los estudiantes pudieron realizar biyecciones entre un vector y un número o viceversa, permitiendo una mayor claridad y facilidad en el estudio de los números enteros. Cabe señalar, que el modelo de desplazamiento realiza el estudio de los números enteros desde un contexto geométrico, por tanto, sería importante realizar este estudio desde un aspecto numérico, considerando a estos números en situaciones no geométricas, con el fin de afianzar más, ha dicho tema.

- ✓ *CONOCIMIENTOS PREVIOS:* Entre las dificultades que se presentaron durante la implementación de la investigación se encuentra una baja fundamentación de los estudiantes en temáticas tales como: adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales, tanto a nivel operativo como a nivel de cálculo mental, lo que lleva a sugerir que se debe plantear un trabajo previo para profundizar y mejorar dichos temas, antes de pasar al estudio de los números enteros. Por otro lado, la implementación de un trabajo arduo y amplio sobre el manejo del software de geometría dinámica Cabri II Plus sería de gran ayuda a la hora de abordar cualquier tema de matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

ADURIZ, A. (2009). *Concepto de modelo científico: una mirada epistemológica de su evolución*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

BRUNO, A. (1997). *La enseñanza de los números negativos: aportes de una investigación*, Números, 29, 5 – 18. Recuperado el 23 de febrero de 2013 de <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/29/Articulo01.pdf>

BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1994). *La recta en el aprendizaje de los números negativos*, Suma 18, 39-48. Recuperado el 23 de febrero de 2013 de <http://revistasuma.es/IMG/pdf/18/039-048.pdf>

BRUNO, A. y CABRERA, N. (2005). *Una experiencia sobre la representación en la recta de números negativos*, Cuadrante, Vol. XIV, No 2. 25 – 41.

CID, E. (2001). *Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos*. En *Pre-Publicaciones del seminario matemático García de Galdeano*, 31, Zaragoza, España. Recuperado el 4 de diciembre de 2012 de <http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2001/preprint-31.pdf>

CID, E. (2002). *Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos*. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, Zaragoza, vol. 2, 529-542.

CID, E. (2003). *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión*. En *Pre-Publicaciones del seminario matemático García de Galdeano*, 25, Zaragoza, España. Recuperado el 11 de diciembre de 2013 de <http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2003/preprint25.pdf>

GALAGOVSKY, L. y ADÚRIZ, A. (2001). *Modelos y analogías en la enseñanza de las ciencias naturales: El concepto de modelo didáctico analógico*. *Enseñanza de las Ciencias*, 231-242.

GONZÁLEZ, M. (2008). *Competencias Básicas en el Área de Matemáticas. Didáctica de la Matemática*. Universidad de Málaga.

GUTIÉRREZ, R. (2005). *Polisemia actual del concepto “modelo mental”: Consecuencias para la investigación didáctica*. *Investigacoes em Ensino de*

Ciencias, 209 - 226. Recuperado el 24 de abril de 2013 de http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol10/n2/v10_n2_a4.htm

JANVIER, C. (1983). *The understanding of directed numbers, en proceedings of the 15th Annual Conference of the North American Chapter of PME*, Montreal, 295-300.

JUSTI, R. (2006). *La enseñanza de ciencias basada en la elaboración de modelos. Enseñanza de las Ciencias*, 173-184.

Ley 115 de 1994. *Ministerio de educación Nacional. República de Colombia*.

LONDOÑO, N. & BEDOYA, H. (1984). *Serie Matemática Progresiva 1*. Santa Fé de Bogotá, Colombia: Norma.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Serie Lineamientos Curriculares*. Santa Fé de Bogotá. Recuperado el 19 de marzo de 2013 de <http://www.eduteka.org/pdfdir/MENLineamientoMatematicas.pdf>

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas: Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar !*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

NISS, M. (1999). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project*. Paper.

OCDE. (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas*. Madrid: INECSE.

Resolución 2343 de Junio 5 de 1996. *Ministerio de educación Nacional. República de Colombia*.

SOTO, O & NARVÁEZ, O. (2004). *La calculadora en el aula: prácticas de matemáticas con la calculadora graficadora TI 92 Plus*. Primera edición. Universidad de Nariño. San Juan de Pasto, Colombia. 9 – 25.

VARGAS, I., GONZÁLEZ, J., IRIARTE, M., JIMENO, M., ORTIZ, A., SANZ, E. (1990). *Números Enteros*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

ANEXOS

ANEXO A

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Licenciatura en Matemáticas

ACTIVIDAD N° 1

INTRODUCCIÓN: Algunas nociones sobre el manejo de Cabri Geometre II Plus

Instrucciones:

Leer con atención las siguientes actividades y realizar el desarrollo en el programa de Cabri Geometre II plus.

- I)
 - a) Ingresar al programa Cabri Geometre II Plus.
 - b) Explorar las herramientas del programa Cabri Geometre II Plus que aparecen en la parte superior del mismo.
 - c) Construir las siguientes figuras geométricas. Punto, recta, semirrecta, segmento, vector, círculo, recta perpendicular.
 - d) Cambiar de color a las anteriores figuras geométricas.
 - e) Guardar el archivo de Cabri Geometre II Plus, con el nombre FIGURA 1.
- II)
 - a) Ingresar al programa Cabri Geometre II Plus.

- b) Construir las siguientes figuras geométricas. Punto, recta, semirrecta, segmento y vector.
- c) Con la primera opción del botón 10 de Cabri, nombrar cada una de las anteriores figuras de la siguiente manera.

<i>Punto</i>	<i>A</i>
<i>Recta</i>	<i>B</i>
<i>Semirrecta</i>	<i>C</i>
<i>Segmento</i>	<i>D</i>
<i>Vector</i>	<i>E</i>

- d) Cambiar de color (Opción 3, Botón 11) a las anteriores figuras, de manera que todas tengan el mismo color.
- e) Cambiar el Grosor (Opción 6, Botón 11) de cada una de las figuras anteriores
- f) Guardar el archivo de Cabri Geometre II Plus, con el nombre FIGURA 2.

III)

- a) Ingresar al programa Cabri Geometre II Plus.
- b) Con la segunda opción del botón 10 de Cabri, escribir los siguientes textos

Nombre de los estudiantes
 Nombre del profesor
 Nombre de la institución
 Una historia corta

- c) Cambiar de color a cada texto (Opción 5, Botón 11), de tal manera, que cada texto tenga un color diferente.
- d) Guardar el archivo de Cabri Geometre II Plus, con el nombre FIGURA 3.

IV)

- a) Ingresar al programa Cabri Geometre II Plus.
- b) Realizar un dibujo libre, utilizando todo lo visto anteriormente
- c) Guardar el archivo Cabri Geometre II Plus, con el nombre de FIGURA 4.

ANEXO B

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Licenciatura en Matemáticas

ACTIVIDAD N° 1 *CONCEPTUALIZACIÓN DE NÚMERO ENTERO.*

Instrucciones:

Leer con atención los siguientes enunciados, resolverlos utilizando Cabri Geometre II Plus y dar respuesta a cada una de las preguntas planteadas, utilizando la opción "Insertar Texto" del mismo programa.

1. (*Archivo Figura 1*) Construir dos puntos cualesquiera, nombrarlos como A y B, luego unir los puntos A y B con dos vectores, uno de A hacia B y el otro de B (C) hacia A (D). ¿Qué característica tienen estos dos vectores?
2. (*Archivo Figura 2*) Sobre la recta dada construir desde el punto O hacia la derecha el vector OA y desde O hacia la izquierda el vector OB. ¿Qué características se observan en las distancias desde O hasta cada uno de los extremos de los vectores?, ¿Se observa algo más de especial?, ¿Se puede mover B?, ¿Por qué?
3. (*Archivo Figura 3*) Sobre la recta dada trazar un punto C a la derecha de A, de tal manera, que la distancia AC sea la misma que OA y unir los puntos OC con un vector; asimismo, trazar un punto D a la izquierda de B, de tal manera, que la distancia BD sea la misma que OB y unir con un vector los puntos OD. ¿Qué se observa en las distancias que hay desde O hasta C y desde O hasta D? ¿Se observa otra característica especial?, ¿Por qué no se puede mover el punto C?
4. (*Archivo Figura 4*) Ahora nombraremos al vector OA, el cual está dirigido hacia la derecha con un + y el número 1, y al vector dirigido hacia la izquierda (OB) con un – y el número 1. ¿Con que número representarían al vector desde O hasta C?, y al vector desde O hasta D? Si continuáramos con los vectores hacia la derecha, ¿Con que números seguiría su representación? ¿Y hacia la izquierda?

Que característica especial se podría concluir de los vectores que van hacia la derecha, con respecto de los que van hacia la izquierda. ¿Y de los números que los representan?

5. Socializar los resultados obtenidos en las anteriores actividades.

ANEXO C

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Licenciatura en Matemáticas

ACTIVIDAD N° 1 ORDEN EN LOS NÚMEROS ENTEROS

Instrucciones:

Leer con atención los siguientes enunciados, resolverlos utilizando Cabri Geometre II Plus y dar respuesta a cada una de las preguntas planteadas, utilizando la opción "Insertar Texto" del mismo programa.

1. (Archivo figura 1). Teniendo en cuenta la recta numérica contestar las siguientes preguntas:
 - a) ¿Cuál es el número entero que está dos unidades a la derecha de -5?
 - b) ¿Cuál es el número entero que está cinco unidades a la izquierda de 7?
 - c) ¿Cuál es el número entero que está nueve unidades a la izquierda de 3?
 - d) ¿Cuál es el número entero que está cuatro unidades a la derecha de 7?
 - e) ¿Cuál es el número entero que está tres unidades a la derecha de 0?
 - f) ¿Cuál es el número entero que está cinco unidades a la izquierda de 0?
2. (Archivo figura 2). Carlos está de vacaciones en la ciudad de Cuzco en Perú, en el día de ayer él midió la temperatura de la calle, la de su casa, la cual tiene calefacción y la del congelador de la nevera. Obteniendo los siguientes datos.

Lugar	Temperatura
Calle	-1°C
Casa	+11°C
Congelador	-9°C

- a) Ubicar los números enteros en la recta numérica.
 - b) ¿En cuál lugar hace más frío, en la calle o en el congelador?
 - c) ¿En cuál lugar hace más calor?
3. (Archivo figura 3). Con la ayuda de la recta numérica, escribir los signos > o < entre cada par de números según corresponda.
 - a) -5 _____ -10
 - b) +3 _____ +9
 - c) -4 _____ 0
 - d) -1 _____ -4

ANEXO D

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Licenciatura en Matemáticas

ACTIVIDAD N° 1 *VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO*

Instrucciones:

Leer con atención los siguientes enunciados, resolverlos utilizando Cabri Geometre II Plus y dar respuesta a cada una de las preguntas planteadas, utilizando la opción "Insertar Texto" del mismo programa.

1. (*Archivo Figura 1*) Una coneja se desplaza en la noche 10m a la derecha de su madriguera y a la noche siguiente nuevamente 10m pero ahora hacia la izquierda de su madriguera.

¿Cuál es la distancia total que recorre la coneja para regresar a su madriguera en cada una de las noches?

¿Qué número entero representa el desplazamiento hacia la derecha de la madriguera? ¿Y el número entero que representa el desplazamiento hacia la izquierda de la madriguera?

¿Que indica el signo en cada una de las anteriores situaciones?

(*Archivo Figura A*) *Definición:* El *Valor Absoluto* de un número entero es la distancia que hay desde el número dado hasta el cero.

2. (*Archivo Figura 2*) Ubicar los siguientes números enteros, representarlos por un vector y nombrar cada vector con su respectivo valor absoluto.

- a) -9
- b) $+7$
- c) -12
- d) $+3$
- e) -11
- f) $+13$

3. (*Archivo Figura 3*) Ubicar los siguientes números enteros y calcular la distancia que los separa, representando la distancia con un vector y un número.

- a) -7 y $+5$
- b) $+6$ y -13
- c) -2 y $+10$
- d) -4 y $+2$
- e) $+8$ y -8

ANEXO E

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Licenciatura en Matemáticas

ACTIVIDAD N° 1 ADICIÓN DE NÚMEROS ENTEROS: Ricardo y Diego

Instrucciones:

Leer con atención los siguientes enunciados, resolverlos utilizando Cabri Geometre II Plus y dar respuesta a cada una de las preguntas planteadas, utilizando la opción "Insertar Texto" del mismo programa.

1. (Archivo figura 1) Ricardo, en el día de ayer caminó por la calle de la ciudad la cual está ubicada en frente de su casa y conecta el oriente con el occidente de su ciudad; Él caminó 3m hacia el occidente de su casa y luego 5m en la misma dirección. Después de haber hecho el recorrido:
 - a) ¿A qué distancia de la casa y en qué punto de la recta numérica quedará ubicado Ricardo?
 - b) ¿Qué relación tiene la posición final de Ricardo con los desplazamientos dados por el mismo?
 - c) Escribir numéricamente los movimientos realizados por Ricardo como una adición de enteros.
2. (Archivo figura 2). Diego, en el día de ayer caminó por la calle de su ciudad, la cual está ubicada en frente de su casa y conecta el oriente con el occidente de su ciudad. Él caminó 2m hacia el oriente de su casa y luego 7m en la misma dirección. Después de haber hecho el recorrido;
 - a) ¿A qué distancia de la casa y en qué punto de la recta numérica quedará ubicado Diego?
 - b) ¿Qué relación tiene la posición final de Diego con los desplazamientos dados por el mismo?
 - c) Escribir numéricamente los movimientos realizados por Diego como una adición de enteros.

ANEXO F

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Licenciatura en Matemáticas

ACTIVIDAD N° 2 EL ASCENSOR

Instrucciones:

Leer con atención los siguientes enunciados, resolverlos utilizando Cabri Geometre II Plus y dar respuesta a cada una de las preguntas planteadas, utilizando la opción “Insertar Texto” del mismo programa.

1. (Archivo figura 1). Con la ayuda de la recta numérica completar la tabla que se encuentra en el archivo de Cabri Geometry II plus.
2. (Archivo figura 2). Pedro el día lunes entró a un hospital a buscar a su hijo que se encontraba en una cita médica, él se subió al ascensor e hizo dos desplazamientos.
 - a) Expresar en palabras los movimientos del ascensor que se muestran en la gráfica.
 - b) Escribir numéricamente los movimientos hechos por el ascensor como una adición de enteros.
 - c) Escribir una regla que permita sumar cualquier par de números enteros de diferente signo.

3. ACTIVIDAD DE REFUERZO

ANEXO G

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Licenciatura en Matemáticas

ACTIVIDAD N° 1 EL MAGO

Instrucciones:

Leer con atención los siguientes enunciados, resolverlos utilizando Cabri Geometre II Plus y dar respuesta a cada una de las preguntas planteadas, utilizando la opción "Insertar Texto" del mismo programa.

1. (Archivo figura 1). Analizar el dibujo.
 - a) ¿Qué se puede decir de lo anterior?
 - b) ¿Es correcto lo que realizó el Mago? ¿Por qué?
 - c) Explicar en palabras la magia realizada
2. (Archivo figura 2). Ayudar al Mago a realizar la siguiente sustracción de enteros, con la magia y la recta numérica.
$$-1 - (+5) =$$
3. (Archivo figura 3). El Mago representó una operación de enteros en la recta numérica:
 - a) Escribir lo representado en la recta como una adición de enteros
 - b) Escribir lo representado en la recta como una sustracción de enteros